А. В. ПОГОРЕЛОВ

ГЕОМЕТРИЯ

6-10

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1 ПО ДВУМ СТОРОНАМ
И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

2. ПО СТОРОНЕ
И ПРИЛЕГАЮЩИМ К НЕЙ
УГЛАМ

3. ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

$a \parallel b$, если:

$\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$)

или

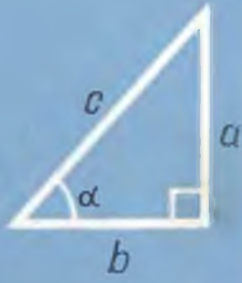
$\angle 1 + \angle 4 = 180°$

($\angle 2 + \angle 3 = 180°$)

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



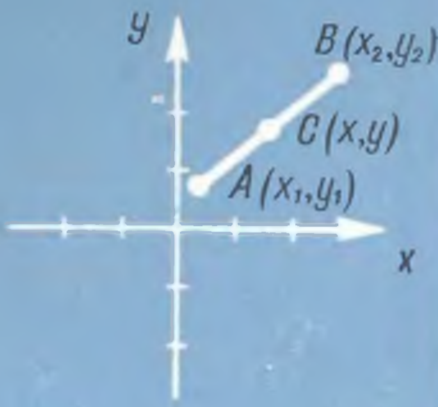
$a^2 + b^2 = c^2$ (ТЕОРЕМА ПИФАГОРА)

$a = c \sin\alpha,\ b = c\cos\alpha,\ a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$

ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

функции	углы					
	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	—1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ



1. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

А.В.ПОГОРЕЛОВ

ГЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ
6—10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ДОПУЩЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ
ПРОСВЕЩЕНИЯ СССР

МОСКВА
„ПРОСВЕЩЕНИЕ" 1982

ББК 22.151я72
П43

П $\frac{4306020400-488}{103(03)-82}$ инф. письмо

© Издательство «Просвещение», 1982 г.

6 класс

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Геометрия — это наука о свойствах геометрических фигур. Слово «геометрия» — греческое, в переводе на русский язык означает «землемерие». Такое название связано с применением геометрии для измерений на местности.

Примеры геометрических фигур: треугольник, квадрат, окружность (рис. 1).

Геометрические фигуры бывают весьма разнообразны. Часть любой геометрической фигуры является геометрической фигурой. Объединение нескольких геометрических фигур есть снова геометрическая фигура. На рисунке 2 фигура слева состоит из треугольника и трех квадратов, а фигура справа состоит из окружности и частей окружности. Всякую геометрическую фигуру мы представляем себе составленной из точек.

Геометрия, которая изучается в школе, называется евклидовой, по имени древнегреческого ученого Евклида (III век до н. э.), создавшего замечательное руководство по математике под названием «Начала». В течение длительного времени геометрию изучали по этой книге.

Мы начнем изучение геометрии с планиметрии. *Планиметрия* — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости.

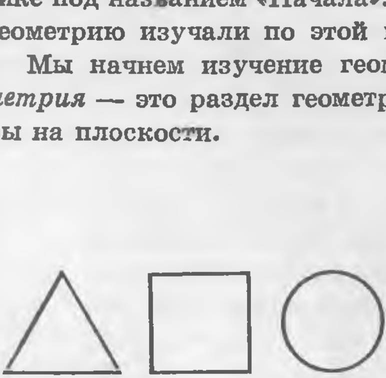


Рис. 1

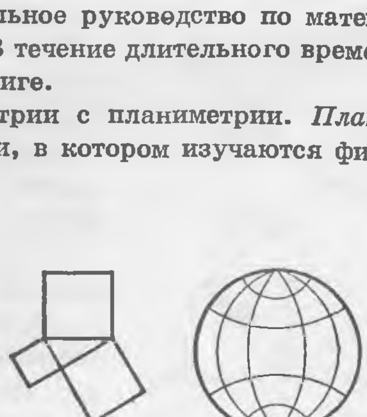


Рис. 2

ТОЧКА И ПРЯМАЯ

Основными геометрическими фигурами на плоскости являются *точка* и *прямая.* На чертеж точки и прямые наносятся остро отточенным карандашом. Для построения прямых пользуются линейкой. Точки принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, D, ... Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, d, ...

На рисунке 3 вы видите точку A и прямую a.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ

Посмотрите на рисунок 4. Вы видите прямые a, b и точки A, B, C. Точки A и C *лежат* на прямой a. Можно сказать также, что точки A и C *принадлежат* прямой a или что прямая a *проходит* через точки A и C.

Точка B лежит на прямой b. Она не лежит на прямой a. Точка C лежит и на прямой a, и на прямой b. Прямые a и b *пересекаются* в точке C. Точка C является *точкой пересечения* прямых a и b.

Рис. 3

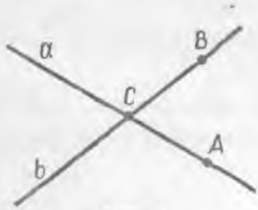


Рис. 4

Рис. 5

На рисунке 5 вы видите, как с помощью линейки строится прямая, проходящая через две заданные точки A и B.

Основными свойствами принадлежности точек и прямых на плоскости мы будем называть следующие два свойства:

I_1. ***Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.***

I_2. ***Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.***

Прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямую a на рисунке 4 можно обозначить AC, а прямую b можно обозначить BC.

Могут ли две различные прямые иметь более одной точки пересечения? Не могут. Если бы они имели две точки пересечения, то через эти точки проходили бы две различные прямые. А это невозможно, так как через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, получается следующее свойство:

1.1. ***Две различные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке.***

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ТОЧЕК НА ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

Посмотрите на рисунок 6. Вы видите прямую a и три точки A, B, C на этой прямой. Точка B лежит *между* точками A и C, она *разделяет* точки A и C. Можно также сказать, что точки A и C *лежат по разные стороны* от точки B. Точки A и B *лежат по одну сторону* от точки C, они не разделяются точкой C. Точки B и C лежат по одну сторону от точки A.

Отрезком называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Эти точки называются *концами* отрезка. Отрезок обозначается указанием его концов. Когда говорят или пишут: «отрезок AB», то подразумевают отрезок с концами в точках A и B.

Рис. 6

На рисунке 7 вы видите отрезок AB. Он является частью прямой AB. Эта часть прямой выделена жирной линией. Точка X прямой лежит между точками A и B. Поэтому она принадлежит отрезку AB. Точка Y не лежит между точками A и B. Поэтому она не принадлежит отрезку AB.

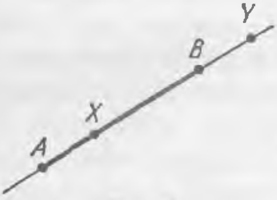


Рис. 7

Посмотрите на рисунок 8. Прямая *a разбивает* плоскость на две полуплоскости. Это разбиение обладает следующим свойством. ***Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересека-***

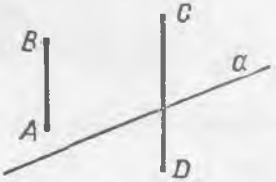


Рис. 8

ется с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой. На рисунке 8 точки A и B лежат в одной из полуплоскостей, на которые прямая a разбивает плоскость. Поэтому отрезок AB не пересекается с прямой a. Точки C и D принадлежат разным полуплоскостям. Поэтому отрезок CD пересекает прямую a.

Основными свойствами расположения точек на прямой и на плоскости мы будем называть следующие свойства:

I_1. ***Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.***

II_2. ***Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.***

Задача (9). Даны прямая и три точки A, B, C, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок BC? Объясните ответ.

Решение. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Точка A принадлежит одной из них. Отрезок AC не пересекает прямую. Значит, точка C лежит в той же полуплоскости, что и точка A. Отрезок AB пересекает прямую. Значит, точка B лежит в другой полуплоскости. Таким образом, точки B и C лежат в разных полуплоскостях. А это значит, что отрезок BC пересекает нашу прямую.

Полупрямой или *лучом* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки. Эта точка называется *начальной точкой* полупрямой. Различные полупрямые одной и той же прямой с общей начальной точкой называются *дополнительными*.

На рисунке 9 вы видите прямую a и точку A на ней. Точка A разбивает прямую a на две полупрямые. Одна из них выделена жирной линией, а другая — тонкой.

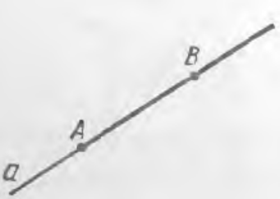


Рис. 9

Полупрямые обозначаются строчными латинскими буквами. Можно обозначать полупрямую двумя точками: начальной и еще какой-нибудь точкой, принадлежащей полупрямой. При этом начальная точка ставится на первом месте. Например, полупрямую, которая выделена жирной линией на рисунке 9, можно обозначить AB.

З а д а ч а (13). На отрезке AB взята точка C. Среди полупрямых AB, AC, CA и CB назовите пары совпадающих полупрямых, дополнительных полупрямых. Объясните ответ.

Р е ш е н и е. Данные полупрямые имеют начальной точкой либо точку A, либо точку C. Рассмотрим сначала полупрямые с начальной точкой A (полупрямые AB и AC). Точка C лежит между точками A и B, так как по условию задачи она принадлежит отрезку AB. Значит, точка A не лежит между точками B и C, т. е. точки B и C лежат по одну сторону от точки A. Поэтому полупрямые AB и AC совпадающие.

Рассмотрим теперь полупрямые с начальной точкой C (полупрямые CA и CB). Точка C разделяет точки A и B. Поэтому точки A и B не могут принадлежать одной полупрямой, а значит, полупрямые CA и CB дополнительные.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

Для измерения отрезков применяются различные измерительные инструменты. Простейшим таким инструментом является линейка с делениями на ней. На рисунке 10 отрезок AB равен 10 см, отрезок AC равен 6 см, а отрезок BC равен 4 см. Длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.

О с н о в н ы м и с в о й с т в а м и измерения отрезков мы будем называть следующие свойства:

III$_1$. ***Каждый отрезок имеет определенную длину, бо́льшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.***

Это значит, что если на отрезке AB взять любую точку C, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC. Длину отрезка AB называют также *расстоянием* между точками A и B.

З а д а ч а (16). Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точ-

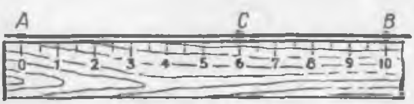


Рис. 10

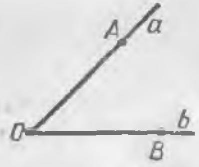


Рис. 11

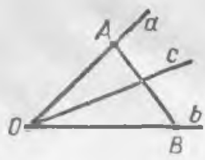


Рис. 12

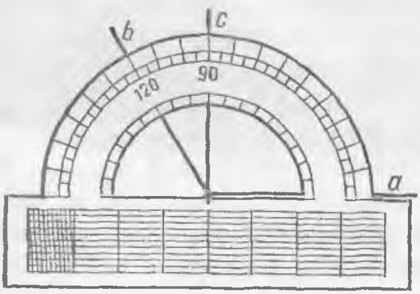


Рис. 13

ками A и B? Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими?

Решение. Если точка A лежит между точками B и C, то по свойству измерения отрезков должно быть: $AB + AC = BC$. Но $4{,}3 + 7{,}5 \neq 3{,}2$. Значит, точка A не лежит между точками B и C.

Если точка C лежит между точками A и B, то должно быть: $AC + BC = AB$. Но $7{,}5 + 3{,}2 \neq 4{,}3$. Значит, точка C не лежит между точками A и B.

Из трех точек на прямой A, B, C одна точка лежит между двумя другими. Значит, этой точкой является B.

Углом называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общей начальной точкой. Эта точка называется *вершиной угла*, а полупрямые — *сторонами угла*. Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется *развернутым*.

На рисунке 11 вы видите угол с вершиной O и сторонами a, b. Угол обозначается либо указанием его вершины, либо указанием его сторон, либо указанием трех точек: вершины и двух точек на сторонах угла. Слово «угол» иногда заменяют значком $\angle$. Угол на рисунке 11 можно обозначить тремя способами: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. В третьем способе обозначения угла буква, обозначающая вершину, ставится посередине.

Посмотрите на рисунок 12. Мы будем говорить, что луч c *проходит между* сторонами угла (ab), если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла.

В случае развернутого угла мы считаем, что **любой луч**, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

Углы измеряются в градусах при помощи транспортира. На рисунке 13 угол (ab) равен 120°, полупрямая c проходит между сторонами угла (ab). Угол (ac) равен 90°, а угол (bc) равен 30°. Угол (ab) равен сумме углов (ac) и (bc).

Основными свойствами измерения углов мы будем называть следующие свойства:

III₂. *Каждый угол имеет определенную градусную меру, бо́льшую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.*

Это значит, что если луч c проходит между сторонами угла (ab), то угол (ab) равен сумме углов (ac) и (bc).

Задача (28). Может ли луч c проходить между сторонами угла (ab), если $\angle(ac) = 30°$, $\angle(cb) = 80°$, $\angle(ab) = 50°$?

Решение. Если луч c проходит между сторонами угла (ab), то по свойству измерения углов должно быть: $\angle(ac) + \angle(cb) = \angle(ab)$. Но $30° + 80° \neq 50°$. Значит, луч c не может проходить между сторонами угла (ab).

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОТКЛАДЫВАНИЯ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

На рисунке 14 показано, как с помощью линейки на полупрямой a с начальной точкой A можно отложить отрезок данной длины (3 см).

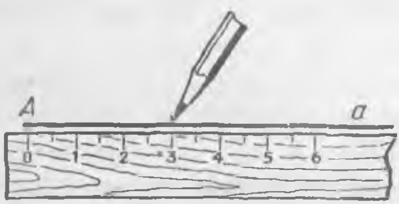


Рис. 14

Посмотрите на рисунок 15. Полупрямая a, будучи продолжена за начальную точку A, разбивает плоскость на две полуплоскости. На рисунке показано, как с помощью транспортира отложить от полупрямой a в верхнюю полуплоскость угол с данной градусной мерой (60°).

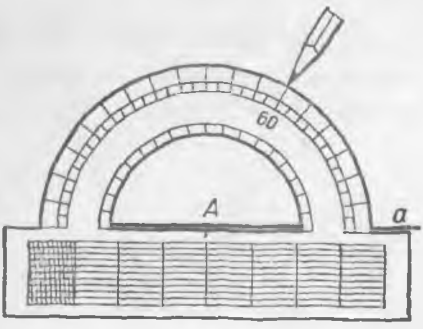


Рис. 15

Основными свойствами откладывания отрезков и углов мы будем называть следующие свойства:

IV_1. ***На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.***

IV_2. ***От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.***

З а д а ч а (35). На луче AB отложен отрезок AC, меньший отрезка AB. Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими? Объясните ответ.

Р е ш е н и е. Так как точки B и C лежат на одной полупрямой с начальной точкой A, то они не разделяются точкой A, т. е. точка A не лежит между точками B и C. Может ли точка B лежать между точками A и C? Если бы она лежала между точками A и C, то было бы $AB + BC = AC$. Но это невозможно, так как по условию отрезок AC меньше отрезка AB. Значит, точка B не лежит между точками A и C. Из трех точек A, B, C одна лежит между двумя другими. Поэтому точка C лежит между точками A и B.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА, РАВНОГО ДАННОМУ

Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки — его *сторонами*. На рисунке 16 вы видите треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC, AC. Треугольник обозначается указанием его вершин. Вместо слова «треугольник» иногда употребляют значок $\triangle$. Например, треугольник на рисунке 16 обозначается так: $\triangle ABC$.

Углом треугольника ABC при вершине A называется угол,

Рис. 16

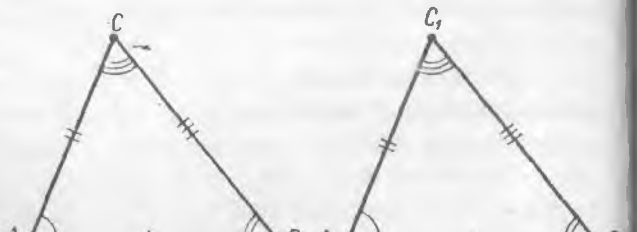


Рис. 17

образованный полупрямыми AB и AC. Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C.

Два отрезка называются *равными*, если они имеют одинаковую длину. Два угла называются *равными*, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *равными*, если у них $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Кратко это выражают словами: *треугольники равны, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.*

На рисунке 17 вы видите два равных треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. У них $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. На чертеже равные отрезки обычно отмечают одной, двумя или тремя черточками, а равные углы — одной, двумя или тремя дужками.

Для обозначения равенства треугольников используется обычный знак равенства: $=$. Запись $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ читается: «Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$». При этом имеет значение порядок, в котором записываются вершины треугольника. Равенство $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означает, что $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \ldots$. А равенство $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ означает уже совсем другое: $\angle A = \angle B_1, \angle B = \angle A_1, \ldots$.

З а д а ч а (43). Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что сторона AB равна 10 м, а угол C равен $90°$. Чему равны сторона PQ и угол R? Объясните ответ.

Р е ш е н и е. Так как треугольники ABC и PQR равны, то у них $\angle C = \angle R$, $AB = PQ$. Значит, $PQ = 10$ м, $\angle R = 90°$.

Пусть мы имеем треугольник ABC и луч a (рис. 18). Переместим треугольник ABC так, чтобы его вершина A совместилась с началом луча a, вершина B попала на луч a, а вершина C оказалась в заданной полуплоскости, определяемой лучом a и его продолжением. Вершины нашего треугольника в этом новом положении обозначим A_1, B_1, C_1. *Треугольник* $A_1B_1C_1$

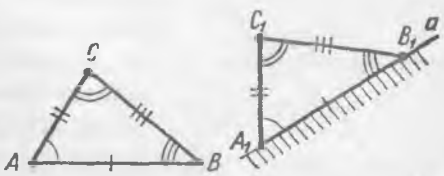


Рис. 18

равен треугольнику ABC. Существование треугольника $A_1B_1C_1$, равного треугольнику ABC и расположенного указанным образом относительно заданного луча a, мы относим к числу о с н о в н ы х с в о й с т в простейших фигур. Это свойство мы будем формулировать так:

IV_3. ***Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.***

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются. При этом прямые считаются неограниченно продолженными в обоих направлениях.

На рисунке 19 показано, как с помощью угольника и линейки провести через данную точку B прямую b, параллельную данной прямой a.

Для обозначения параллельности прямых используется значок ||. Запись $a \parallel b$ читается: «Прямая a параллельна прямой b».

О с н о в н о е с в о й с т в о параллельных прямых состоит в следующем:

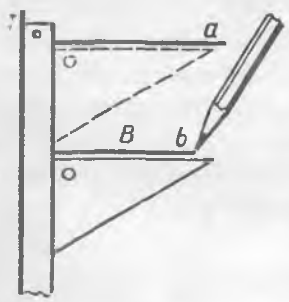


Рис. 19

V. ***Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.***

З а д а ч а (45). Может ли прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, не пересекать другую? Объясните ответ.

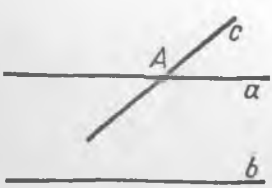


Рис. 20

Р е ш е н и е. Обозначим через a и b две параллельные прямые, а через c обозначим прямую, пересекающую одну из прямых a или b, например a. Обозначим через A точку пересечения прямых a и c (рис. 20). Если бы прямая c не пересекала прямую b, то через точку A проходили бы две прямые, не пересекающие прямую b:

прямая a и прямая c. Но по свойству параллельных прямых это невозможно. Значит, прямая c, пересекая прямую a, должна пересекать и прямую b.

АКСИОМЫ, ТЕОРЕМЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путем рассуждения. Это рассуждение называется *доказательством*. Предложение, выражающее свойство геометрической фигуры, которое доказывается, называется *теоремой*. Приведем пример.

Теорема 1.2. ***Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон.***

Доказательство. Пусть прямая a не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает его сторону AB (рис. 21). Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях, так как отрезок AB пересекается с прямой a. Точка C лежит в одной из этих полуплоскостей. Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой A, то отрезок AC не пересекается с прямой a, а отрезок BC пересекается с этой прямой (рис. 21, a). Если точка C лежит в одной полуплоскости с точкой B, то отрезок AC пересекается с прямой a, а отрезок BC не пересекается (рис. 21, $б$). В обоих случаях прямая a пересекает только один из отрезков AC или BC. Вот и все доказательство.

Основные свойства простейших фигур, сформулированные в данном параграфе, являются отправными в доказательствах других свойств. Основные свойства не доказываются и называются *аксиомами*.

При доказательстве теорем разрешается пользоваться основными свойствами простейших фигур, т. е. аксиомами, а также свойствами, уже доказанными, т. е. доказанными теоремами. Никакими другими свойствами фигур, даже если они нам кажутся очевидными, пользоваться нельзя.

При доказательстве теорем разрешается пользоваться чертежом как геометрической записью того, что мы выражаем

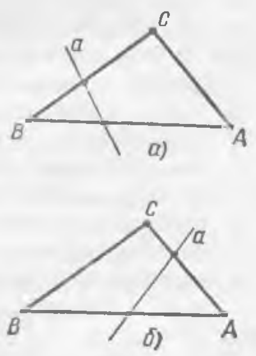


Рис. 21

словами. Не разрешается использовать в рассуждении свойства фигуры, видные на чертеже, если мы не можем обосновать их, опираясь на аксиомы и теоремы, доказанные ранее.

Формулировка теоремы обычно состоит из двух частей. В одной части говорится о том, что дано. Эта часть называется *условием* теоремы. В другой части говорится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется *заключением* теоремы. Условие теоремы 1.2 состоит в том, что прямая не проходит ни через одну из вершин треугольника и пересекает одну из его сторон. Заключение теоремы состоит в том, что эта прямая пересекает только одну из двух других сторон треугольника.

В геометрии наряду с такими словами, как аксиома и теорема, используется также слово «определение». Дать *определение* чему-либо — значит объяснить, что это такое. Например, говорят: «Дайте определение треугольника». На это отвечают: «Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки». Другой пример: «Дайте определение параллельных прямых». Отвечаем: «Прямые называются параллельными, если они не пересекаются». Вы уже знаете определения равенства отрезков, равенства углов и треугольников.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что такое геометрия?
2. Приведите примеры геометрических фигур.
3. Что такое планиметрия?
4. Назовите основные геометрические фигуры на плоскости.
5. Каким чертежным инструментом пользуются для проведения прямых?
6. Как обозначаются точки и прямые?
7. Какие точки, отмеченные на рисунке 4, лежат на прямой a, какие точки — на прямой b? В какой точке прямые a и b пересекаются?
8. Сформулируйте основные свойства принадлежности точек и прямых.
9. Объясните, почему две различные прямые не могут иметь две точки пересечения.
10. Какая из трех точек на рисунке 6 разделяет две другие? Как расположены точки B и C относительно точки A?
11. Объясните, что такое отрезок с концами в данных точках.

12. Какими свойствами обладает разбиение плоскости на две полуплоскости?
13. Сформулируйте основные свойства взаимного расположения точек на прямой и на плоскости.
14. Что такое полупрямая или луч? Какие полупрямые называются дополнительными?
15. Как обозначаются полупрямые?
16. Каким инструментом пользуются для измерения отрезков?
17. Сформулируйте основное свойство измерения отрезков.
18. Что называется расстоянием между двумя данными точками?
19. Какая фигура называется углом?
20. Назовите вершину и стороны угла на рисунке 11.
21. Какой угол называется развернутым?
22. Как обозначается угол?
23. Объясните, что означает выражение: «Полупрямая проходит между сторонами угла».
24. В каких единицах измеряются углы и с помощью какого инструмента? Объясните, как проводится измерение.
25. Сформулируйте основные свойства измерения углов.
26. Сформулируйте основные свойства откладывания отрезков и углов.
27. Что такое треугольник?
28. Назовите вершины и стороны треугольника на рисунке 16.
29. Что такое угол треугольника при данной вершине?
30. Какие отрезки называются равными?
31. Какие углы называются равными?
32. Что означает выражение: «Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$»? Как обозначается равенство треугольников?
33. Как на рисунке отмечаются у равных треугольников соответствующие стороны и углы?
34. Объясните по рисунку 18 существование треугольника, равного данному.
35. Какие прямые называются параллельными? Какой значок используется для обозначения параллельности прямых?
36. Сформулируйте основное свойство параллельных прямых.
37. Что такое геометрическое доказательство?
38. Что такое теорема?
39. Приведите пример теоремы и ее доказательства.
40. Сформулируйте аксиомы принадлежности точек и прямых.
41. Сформулируйте аксиомы измерения отрезков и углов.
42. Сформулируйте аксиомы откладывания отрезков и углов.
43. Сформулируйте аксиому существования треугольника, равного данному.
44. В чем состоит аксиома параллельных?
45. Какими свойствами геометрических фигур разрешается пользоваться при доказательстве теоремы?

46. Как используется чертеж при доказательстве теоремы?
47. Из каких двух частей состоит формулировка теоремы?
48. Что значит дать определение чему-либо? Дайте определения равенства отрезков, углов и треугольников.

УПРАЖНЕНИЯ [1]

1. Проведите прямую. Отметьте какую-нибудь точку A, лежащую на прямой, и точку B, не лежащую на прямой.
2. Проведите две пересекающиеся прямые a и b. Отметьте точку C пересечения прямых, точку A на прямой a, не лежащую на прямой b, точку D, не лежащую ни на одной из прямых a и b.
3. Отметьте на листе бумаги две точки. Проведите через них от руки прямую. С помощью линейки проверьте правильность построения. Повторите упражнение.
4. Отметьте на листе бумаги две точки. Отметьте теперь третью точку на глаз так, чтобы она лежала на прямой, проходящей через первые две точки. Проверьте правильность построения с помощью линейки. Повторите упражнение.
5. Проведите прямую a. Отметьте на прямой две какие-нибудь точки A и B. Отметьте теперь точку C так, чтобы точка A лежала между точками B и C.
6. Проведите прямую a. Отметьте на прямой две какие-нибудь точки A и B. Отметьте теперь какую-нибудь точку C отрезка AB.
7. Сколько точек пересечения могут иметь два отрезка, если они не лежат на одной прямой? Объясните ответ.
8. Проведите прямую и отметьте какую-нибудь точку A, не лежащую на этой прямой. Отметьте теперь две точки B и C так, чтобы отрезок AB пересекал прямую, а отрезок BC не пересекал ее.
9. Даны прямая и три точки A, B, C, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок BC? Объясните ответ.
10. Даны прямая и четыре точки A, B, C и D, не лежащие на этой прямой. Пересекает ли прямую отрезок AD, если: 1) отрезки AB, BC и CD пересекают прямую; 2) отрезки AC и BD пересекают прямую, а отрезок AB не пересекает; 3) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; 4) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; 5) отрезки

[1] Многие упражнения настоящего учебника взяты из школьных учебников и задачников прошлых лет, в особенности из «Геометрии» А. П. Киселева и «Сборника задач по геометрии» Н. Рыбкина.

AB, BC и CD не пересекают прямую; 6) отрезки AB, AC и CD пересекают прямую? Объясните ответ.

11. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости относительно этой прямой, а две точки — в другой полуплоскости. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков пересекает прямую? Объясните ответ.
12. Отметьте две точки A и B. Проведите полупрямую AB.
13. На отрезке AB взята точка C. Среди полупрямых AB, AC, CA, CB назовите пары совпадающих полупрямых, дополнительных полупрямых. Объясните ответ.
14. Точка M лежит на прямой CD между точками C и D. Найдите длину отрезка CD, если: 1) $CM = 2{,}5$ см, $MD = 3{,}5$ см; 2) $CM = 3{,}1$ дм, $MD = 4{,}6$ дм; 3) $CM = 12{,}3$ м, $MD = 5{,}8$ м.
15. Отметьте на прямой две точки. Отметьте на глаз середину отрезка, соединяющего эти точки. Проверьте правильность построения измерениями с помощью линейки. Повторите упражнение.
16. Три точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка C лежать между точками A и B? Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими?
17. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если: 1) $AC = 5$ см, $BC = 7$ см; 2) $AC = 9{,}1$ м, $AB = 9{,}2$ м; 3) $AB = 3$ дм, $BC = 4$ дм, $AC = 7$ дм? Объясните ответ.
18. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Может ли точка B разделять точки A и C, если: 1) $AC = 5$ см, $AB = 7$ см; 2) $AC = 7$ м, $BC = 7{,}6$ м? Объясните ответ.
19. Могут ли точки A, B, C лежать на одной прямой, если $AB = 1{,}8$ м, $AC = 1{,}3$ м, $BC = 3$ м? Объясните ответ.
20. Расстояния от точки A до точек B и C равны 5 см и 7 см, а расстояние между точками B и C равно 6 см. Могут ли точки A, B и C лежать на одной прямой? Объясните ответ.
21. Могут ли три точки A, B, C лежать на одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC? Объясните ответ.
22. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 2{,}7$ м, $AC = 3{,}2$ м. Сколько решений имеет задача?
23. На отрезке AB взята точка C. Какой отрезок длиннее: AB или AC? Почему?
24. Может ли точка X принадлежать отрезку AB, если $AX > AB$? Объясните ответ.

25. На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если: 1) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC; 2) отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC; 3) точка C — середина отрезка AB; 4) длины отрезков AC и BC относятся как 2 : 3.

26. Проведите из одной точки три произвольных луча. Определите на глаз углы, образуемые этими лучами. Проверьте ваши ответы, измеряя углы транспортиром. Повторите упражнение.

27. Луч a проходит между сторонами угла (cd). Найдите угол (cd), если: 1) $\angle(ac) = 35°$, $\angle(ad) = 75°$; 2) $\angle(ac) = 57°$, $\angle(ad) = 62°$; 3) $\angle(ac) = 94°$, $\angle(ad) = 85°$.

28. Может ли луч c проходить между сторонами угла (ab), если: 1) $\angle(ac) = 30°$, $\angle(cb) = 80°$, $\angle(ab) = 50°$; 2) $\angle(ac) = 100°$, $\angle(cb) = 90°$; 3) угол (ac) больше угла (ab)?

29. Луч c проходит между сторонами угла (ab). Какой угол больше: $\angle(ab)$ или $\angle(ac)$? Почему?

30. Между сторонами угла (ab), равного 60°, проходит луч c. Найдите углы (ac) и (bc), если: 1) угол (ac) на 30° больше угла (bc); 2) угол (ac) в два раза больше угла (bc); 3) луч c делит угол (ab) пополам; 4) градусные меры углов (ac) и (bc) относятся как 2 : 3.

31. Проведите прямую. Отметьте на ней какую-нибудь точку A. А теперь отметьте на глаз точку B этой прямой так, чтобы $AB = 5$ см. Проверьте точность построения точки B линейкой. Повторите упражнение для: 1) $AB = 3$ см, 2) $AB = 7$ см, 3) $AB = 10$ см.

32. Постройте на глаз углы 30°, 45°, 60°, 90°. Проверьте точность построения транспортиром. Повторите упражнение.

33. Существует ли на полупрямой AB такая точка X, отличная от B, что $AX = AB$? Объясните ответ.

34. Сколько существует точек X на прямой AB, отличных от B, для которых $AX = AB$? Объясните ответ.

35. На луче AB отложен отрезок AC, меньший отрезка AB. Какая из трех точек A, B, C лежит между двумя другими? Объясните ответ.

36. На луче AB отмечена точка C. Найдите длину отрезка BC, если: 1) $AB = 1{,}5$ м, $AC = 0{,}3$ м; 2) $AB = 2$ см, $AC = 4{,}4$ см.

37. Постройте на глаз треугольник с равными сторонами (равносторонний треугольник). Проверьте точность построения измерением сторон.

38. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. Чему равна сторона AB треугольника, если $AD = 5$ см, а $BD = 6$ см?

39. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. Чему равен угол C треугольника, если $\angle ACD = 30°$, а $\angle BCD = 70°$?
40. Начертите какой-нибудь треугольник. Постройте от руки, на глаз, равный ему треугольник. Проверьте правильность построения, измеряя соответствующие углы и стороны. Повторите упражнение.
41. Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Найдите стороны треугольника PQR. Объясните ответ.
42. Треугольники ABC и PQR равны. Углы второго треугольника известны: $\angle P = 40°$, $\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$. Найдите углы треугольника ABC.
43. Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что сторона AB равна 10 м, а угол C равен 90°. Чему равны сторона PQ и угол R? Объясните ответ.
44. Треугольники ABC, PQR и XYZ равны. Известно, что $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $ZX = 7$ см. Найдите остальные стороны каждого треугольника.
45. Может ли прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, не пересекать другую? Объясните ответ.
46. Даны две пересекающиеся прямые. Можно ли провести третью прямую, параллельную каждой из двух данных?
47. Может ли прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекать каждую его сторону? Почему?
48. Даны четыре точки: A, B, C и D. Известно, что точки A, B, C лежат на одной прямой и точки B, C, D также лежат на одной прямой. Докажите, что все четыре точки лежат на одной прямой.
49. Даны четыре прямые: a, b, c и d. Известно, что прямые a, b, c пересекаются в одной точке и прямые b, c, d также пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре данные прямые проходят через одну точку.
50. Прямая AB пересекает отрезок CD, а прямая CD пересекает отрезок AB. Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.
51. Дан треугольник ABC. На стороне AC взята точка B_1, а на стороне BC — точка A_1. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются.
52. Отрезки AB и CD, не лежащие на одной прямой, пересекаются в точке E. Докажите, что отрезок AC не пересекает прямую BD.

§ 2. УГЛЫ

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

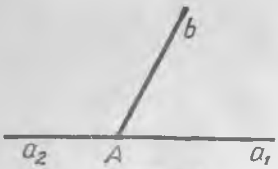


Рис. 22

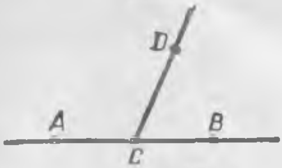


Рис. 23

О п р е д е л е н и е. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

На рисунке 22 углы (a_1b) и (a_2b) смежные. У них сторона b общая, а стороны a_1 и a_2 являются дополнительными полупрямыми.

Пусть C — точка на прямой AB, лежащая между точками A и B, а D — точка, не лежащая на прямой AB (рис. 23). Тогда углы BCD и ACD смежные. У них сторона CD общая. Стороны CA и CB являются дополнительными полупрямыми прямой AB, так как точки A и B этих полупрямых разделяются начальной точкой C.

Т е о р е м а 2. 1. *Сумма смежных углов равна 180°.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\angle(a_1b)$ и $\angle(a_2b)$ — данные смежные углы (см. рис. 22). Луч b проходит между сторонами a_1 и a_2 развернутого угла. Поэтому сумма углов (a_1b) и (a_2b) равна развернутому углу, т. е. 180°. Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 следует, что *если два угла равны, то смежные с ними углы равны.*

З а д а ч а (3). Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.

Р е ш е н и е. Обозначим градусную меру меньшего из углов через x. Тогда градусная мера большего угла будет $2x$.

Рис. 24

Сумма углов равна 180°. Итак,

$$x + 2x = 180.$$

Отсюда $x = 60$. Значит, наши смежные углы равны 60° и 120°.

Угол, равный 90°, называется *прямым углом*. Из теоремы 2.1 следует, что *угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.*

Угол, меньший 90°, называется *острым углом*. Угол, больший 90° и меньший 180°, называется *тупым*. Так как сумма смежных углов равна 180°, то угол, смежный с острым, тупой, а угол, смежный с тупым, острый. На рисунке 24 изображены три вида углов.

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Определение. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

На рисунке 25 углы (a_1b_1) и (a_2b_2) вертикальные. Стороны a_2 и b_2 второго угла являются дополнительными полупрямыми сторон a_1 и b_1 первого угла.

Теорема 2. 2. *Вертикальные углы равны.*

Доказательство. Пусть (a_1b_1) и (a_2b_2) — данные вертикальные углы (рис. 25). Угол (a_1b_2) является смежным с углом (a_1b_1) и с углом (a_2b_2). Отсюда по теореме 2.1 заключаем, что каждый из углов (a_1b_1) и (a_2b_2) дополняет угол (a_1b_2) до 180°, т. е. углы (a_1b_1) и (a_2b_2) равны. Теорема доказана.

Задача (8). Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 50°. Найдите эти углы.

Решение. Два угла, которые получаются при пересечении двух прямых, либо смежные, либо вертикальные. Данные углы не могут быть смежными, так как их сумма равна 50°, а сумма смежных углов равна 180°. Значит, они вертикальные. Так как вертикальные углы равны и по условию их сумма 50°, то каждый из углов равен 25°.

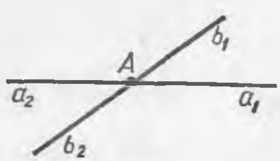


Рис. 25

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

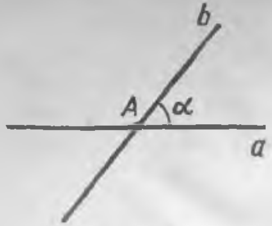


Рис. 26

Пусть a и b — две пересекающиеся прямые (рис. 26). Они образуют четыре угла. Пусть α — один из этих углов. Тогда любой из остальных трех углов будет либо смежным с углом α, либо вертикальным с углом α. Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае мы говорим, что прямые пересекаются под прямым углом.

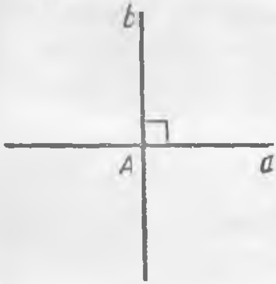


Рис. 27

О п р е д е л е н и е. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом (рис. 27).

Перпендикулярность прямых обозначается значком $\perp$. Запись $a \perp b$ читается: «Прямая a перпендикулярна прямой b».

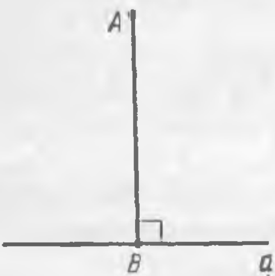


Рис. 28

О п р е д е л е н и е. *Перпендикуляром* к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, имеющий концом их точку пересечения. Этот конец отрезка называется *основанием* перпендикуляра.

На рисунке 28 перпендикуляр AB проведен из точки A к прямой a. Точка B — основание перпендикуляра.

Т е о р е м а 2.3. ***Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.***

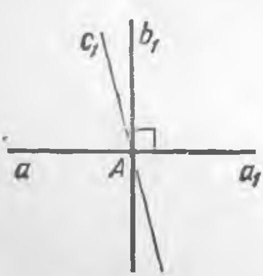


Рис. 29

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — данная прямая и A — данная точка на ней. Обозначим через a_1 одну из полупрямых прямой a с начальной точкой A (рис. 29). Отложим от полупрямой a_1 угол (a_1b_1), равный $90°$. Тогда прямая, содержащая луч b_1, будет перпендикулярна прямой a.

Допустим, что существует другая прямая, тоже проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a. Обозначим через c_1 полупрямую этой прямой, лежащую в одной полуплоскости с лучом b_1.

Углы $(a_1 b_1)$ и $(a_1 c_1)$, равные $90°$ каждый, отложены в одну полуплоскость от полупрямой a_1. Но от полупрямой a_1 в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный $90°$. Поэтому не может быть другой прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой a. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО

Способ доказательства, который мы применили в теореме 2.3, называется *доказательством от противного*. Этот способ доказательства состоит в том, что мы делаем сначала предположение, противоположное тому, что утверждается теоремой. Затем путем рассуждений, опираясь на аксиомы и уже доказанные теоремы, приходим к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо доказанной ранее теореме. На этом основании заключаем, что наше предположение было неверным, а значит, верно утверждение теоремы.

Поясним это на примере доказательства теоремы 2.3. Теоремой утверждается, что через каждую точку прямой можно провести *только одну* перпендикулярную ей прямую. Допустив, что таких прямых можно провести две, мы пришли к выводу, что от данной полупрямой в данную полуплоскость можно отложить два угла с одной и той же градусной мерой ($90°$). А это противоречит аксиоме откладывания углов. Согласно этой аксиоме от данной полупрямой в данную полуплоскость можно отложить *только один* угол с данной градусной мерой.

УГЛЫ, ОТЛОЖЕННЫЕ В ОДНУ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Теорема 2.4. ***Если от данной полупрямой отложить в одну полуплоскость два угла, то сторона меньшего угла, отличная от данной полупрямой, проходит между сторонами большего угла.***

Доказательство. Пусть $\angle(ab)$ и $\angle(ac)$ — углы, отложенные от данной полупрямой a в одну полуплоскость, и пусть угол (ab) меньше угла (ac) (рис. 30). Докажем, что луч b проходит между сторонами угла (ac).

Обозначим через a_1 полупрямую, дополнительную к a. Отметим на луче a какую-нибудь точку A, на луче a_1 точку B и на луче c точку C.

Прямая, содержащая луч b, пересекает сторону AB треугольника ABC, а значит, пересекает одну из двух других его сторон: AC или BC. Пересечение производится лучом b, так как дополнительный луч лежит в другой полуплоскости.

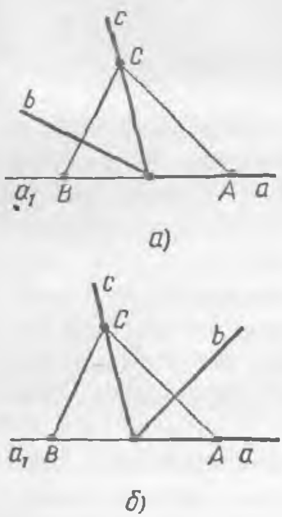


Рис. 30

Допустим, что луч b пересекает отрезок BC, а значит, проходит между сторонами угла (a_1c) (рис. 30, a). Тогда угол (a_1c) больше угла (a_1b). А для смежных им углов будет: угол (ac) меньше угла (ab). Но это противоречит условию теоремы. Итак, луч b не пересекает отрезок BC. Значит, он пересекает отрезок AC (рис. 30, *б*) и поэтому проходит между сторонами угла (ac). Теорема доказана.

Задача (16). От полупрямой AB в разные полуплоскости отложены углы $\angle BAC = 80°$ и $\angle BAD = 70°$. Найдите угол CAD.

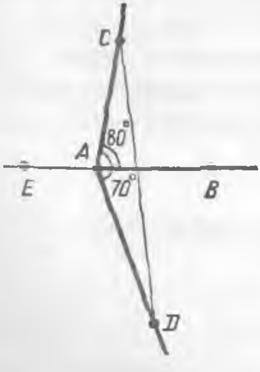


Рис. 31

Решение. Так как точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, то отрезок CD пересекает эту прямую (рис. 31). Значит, луч AB или дополнительный луч AE проходит между сторонами угла CAD. Поэтому угол CAD равен либо сумме углов BAC и BAD, либо сумме смежных им углов EAC и EAD. В первом случае он равен $80° + 70° = 150°$, а во втором $(180°—80°)+(180°—$

$- 70°) = 210°$. Второй случай невозможен, так как градусная мера угла не превосходит 180°. Итак, угол *CAD* равен 150°.

Определение. *Биссектрисой* угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит угол пополам.

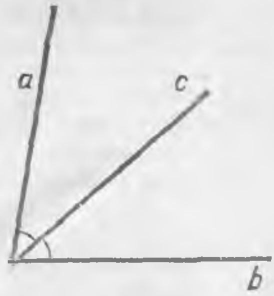


Рис. 32

На рисунке 32 вы видите угол (ab). Луч c исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам: $\angle(ac) = \angle(bc)$. Луч c является биссектрисой угла (ab).

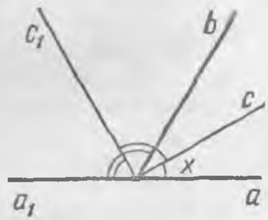


Рис. 33

Задача (20). Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

Решение. Пусть $\angle(ab)$ и $\angle(a_1b)$ — смежные углы и c, c_1 — их биссектрисы (рис. 33). Обозначим угол (ac) через x. Тогда

$$\angle(a_1c) = 180° - x, \quad \angle(ab) = 2x, \quad \angle(a_1b) = 180° - 2x,$$

$$\angle(a_1c_1) = \frac{180° - 2x}{2} = 90° - x.$$

Так как угол (a_1c) больше угла (a_1c_1), то луч c_1 проходит между сторонами угла (a_1c). Значит,

$$\angle(cc_1) = \angle(a_1c) - \angle(a_1c_1) = (180° - x) - (90° - x) = 90°.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие углы называются смежными?
2. Объясните, почему углы *DCA* и *DCB* на рисунке 23 смежные.
3. Докажите, что сумма смежных углов равна 180°.
4. Докажите, что если два угла равны, то смежные с ними углы также равны.
5. Какой угол называется прямым (острым, тупым)?
6. Докажите, что угол, смежный прямому, есть прямой угол.
7. Какие углы называются вертикальными?
8. Докажите, что вертикальные углы равны.
9. Докажите, что если при пересечении двух прямых один из углов прямой, то остальные три угла тоже прямые.
10. Какие прямые называются перпендикулярными? Какой значок используется для обозначения перпендикулярности прямых?

11. Что такое перпендикуляр к прямой?
12. Докажите, что через любую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.
13. Объясните, в чем состоит доказательство от противного.
14. Докажите теорему об углах, отложенных в одну полуплоскость.
15. Что называется биссектрисой угла?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите углы, смежные с углами: 1) 30°, 2) 45°, 3) 60°, 4) 90°.
2. Могут ли два смежных угла быть оба: 1) острыми; 2) тупыми; 3) прямыми? Обоснуйте ответ.
3. Найдите смежные углы, если один из них в два раза больше другого.
4. Найдите смежные углы, если: 1) один из них на 30° больше другого; 2) их разность равна 40°; 3) один из них в 3 раза меньше другого.
5. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как: 1) $2:3$; 2) $3:7$; 3) $11:25$; 4) $22:23$.
6. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30°. Чему равны остальные углы?
7. Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме 100°?
8. Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 50°. Найдите эти углы.
9. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.
10. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, на 50° меньше другого. Найдите эти углы.
11. Найдите углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трех из этих углов равна 270°.
12. Докажите, что если три из четырех углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равны, то прямые перпендикулярны.
13. Проходит ли луч c между сторонами угла (ab), если: 1) $\angle(ab) = 40^\circ$, $\angle(ac) = 50^\circ$; 2) углы (ac) и (bc) тупые?
14. Из вершины развернутого угла (aa_1) в одну полуплоскость проведены лучи b и c. Чему равен угол (bc), если: 1) $\angle(ab) = 50^\circ$, $\angle(ac) = 70^\circ$; 2) $\angle(a_1b) = 50^\circ$, $\angle(ac) = 70^\circ$; 3) $\angle(ab) = 60^\circ$, $\angle(a_1c) = 30^\circ$?
15. Из вершины развернутого угла (aa_1) проведены лучи b и c в одну полуплоскость. Известно, что $\angle(ab) = 60^\circ$, а $\angle(ac) = 30^\circ$. Найдите углы (a_1b), (a_1c) и (bc).
16. От полупрямой AB в разные полуплоскости отложены углы $\angle BAC = 80^\circ$ и $\angle BAD = 70^\circ$. Найдите угол CAD.
17. От полупрямой AB в разные полуплоскости отложены

углы BAC и BAD. Найдите угол CAD, если: 1) $\angle BAC = 80°$, $\angle BAD = 170°$; 2) $\angle BAC = 87°$, $\angle BAD = 98°$; 3) $\angle BAC = 140°$, $\angle BAD = 30°$.

18. Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного: 1) 30°; 2) 52°; 3) 172°?

19. Найдите угол, если его биссектриса образует со стороной угол, равный: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89°.

20. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

21. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

22. Найдите угол между биссектрисой и продолжением одной из сторон данного угла, равного: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.

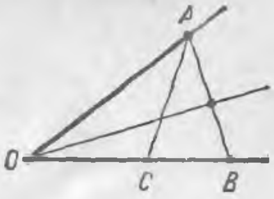


Рис. 34

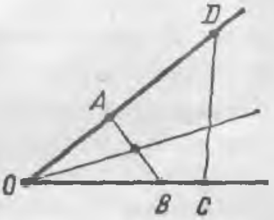


Рис. 35

23. Докажите, что если луч, исходящий из вершины угла, пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла, то он пересекает: 1) отрезок AC с концами на сторонах угла (рис. 34); 2) любой другой отрезок CD с концами на сторонах этого угла (рис. 35).

§ 3. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 3.1 (признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 36). Докажем, что треугольники равны, т. е. докажем, что у них и $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$.

По аксиоме существования треугольника, равного данному, существует треугольник $A_1B_2C_2$, равный треугольнику ABC, у которого вершина B_2 лежит на луче A_1B_1, а вер-

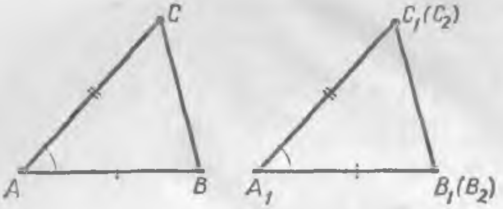


Рис. 36

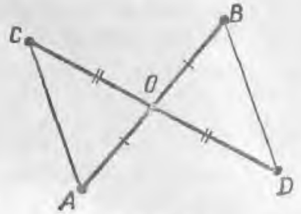


Рис. 37

шина C_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной C_1 относительно прямой A_1B_1. Так как $A_1B_1 = A_1B_2$, то по аксиоме откладывания отрезков точка B_2 совпадает с точкой B_1. Так как $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$, то по аксиоме откладывания углов луч A_1C_2 совпадает с лучом A_1C_1. И так как $A_1C_1 = A_1C_2$, то вершина C_2 совпадает с вершиной C_1. Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, а значит, равен треугольнику ABC. Теорема доказана.

Задача (1). **Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок $AC = 10$ м?**

Решение. Треугольники AOC и BOD равны по первому признаку равенства треугольников (рис. 37). У них углы AOC и BOD равны как вертикальные, а $OA = OB$ и $OC = OD$ потому, что точка O является серединой отрезков AB и CD. Из равенства треугольников AOC и BOD следует равенство их сторон AC и BD. А так как по условию задачи $AC = 10$ м, то и $BD = 10$ м.

ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема 3.2 (признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам). ***Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 38). Докажем, что треугольники равны, т. е. докажем, что $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$.

По аксиоме существования треугольника, равного данному, существует треугольник $A_1B_2C_2$, равный треугольнику ABC, у которого вершина B_2 лежит на луче A_1B_1, а вершина C_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной C_1 относительно прямой A_1B_1. Так как $A_1B_2 = A_1B_1$, то вершина B_2 совпадает с вершиной B_1. Так как $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$, то по аксиоме откладывания углов луч A_1C_1 совпадает с лучом A_1C_2, а луч B_1C_1 совпадает с лучом B_1C_2. Отсюда следует, что вершина C_2 совпадает с вершиной C_1. Итак, треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником $A_1B_2C_2$, а значит, равен треугольнику ABC. Теорема доказана.

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием* треугольника.

На рисунке 39 изображен равнобедренный треугольник ABC. У него боковые стороны AC и BC, а основание AB.

Теорема 3. 3. ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

Доказательство. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB (рис. 39). Докажем, что у него $\angle A = \angle B$. Треугольник CAB равен треугольнику CBA по первому признаку равенства треугольников. Действительно, $CA = CB$, $CB = CA$, $\angle C = \angle C$. Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle B$. Теорема доказана.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним*.

Задача (13). Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.

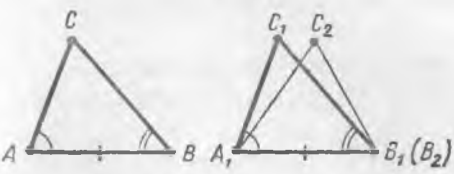


Рис. 38

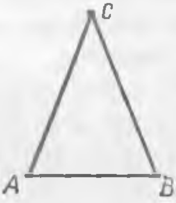


Рис. 39

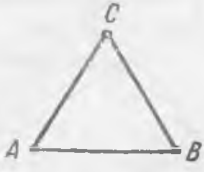


Рис. 40

Р е ш е н и е. Пусть ABC — данный треугольник с равными сторонами: $AB = BC = CA$ (рис. 40). Так как $AB = BC$, то этот треугольник равнобедренный с основанием AC. По теореме 3.3 $\angle C = \angle A$. Так как $BC = CA$, то треугольник ABC равнобедренный с основанием AB. По теореме 3.3 $\angle A = \angle B$. Таким образом, $\angle C = \angle A = \angle B$, т. е. все углы треугольника равны.

Т е о р е м а 3. 4. ***Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle A = \angle B$ (см. рис. 39). Докажем, что он равнобедренный с основанием AB. Треугольник ABC равен треугольнику BAC по второму признаку равенства треугольников. Действительно, $AB = BA$, $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. Из равенства треугольников следует, что $AC = BC$. Теорема доказана.

Теорема 3.4 называется *обратной* теореме 3.3. Заключение теоремы 3.3 является условием теоремы 3.4. А условие теоремы 3.3 является заключением теоремы 3.4. Не всякая теорема имеет обратную, т. е. если данная теорема верна, то обратная теорема может быть неверна. Поясним это на примере теоремы о вертикальных углах. Эту теорему можно сформулировать так: если два угла вертикальные, то они равны. Обратная ей теорема была бы такой: если два угла равны, то они вертикальные. А это, конечно, неверно. Два равных угла вовсе не обязаны быть вертикальными.

З а д а ч а (14). Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 13.

Р е ш е н и е. В задаче 13 условие состоит в том, что треугольник равносторонний, т. е. все его стороны равны, а заключение — в том, что все углы треугольника равны. Поэтому обратная теорема должна формулироваться так. Если у треугольника все углы равны, то у него все стороны равны. Докажем эту теорему.

Пусть ABC — треугольник с равными углами: $\angle A = \angle B = \angle C$. Так как $\angle A = \angle B$, то по теореме 3.4 $AC = CB$. Так как $\angle B = \angle C$, то по теореме 3.4 $AC = AB$. Таким образом, $AB = AC = CB$, т. е. все стороны треугольника равны.

МЕДИАНА, БИССЕКТРИСА И ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника. На рисунке 41 вы видите два треугольника, у которых проведены высоты из вершин B и B_1. На рисунке 41, *а* основание высоты лежит на стороне треугольника, на рисунке 41, *б* — на продолжении стороны треугольника.

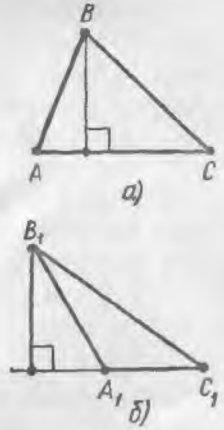


Рис. 41

Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне (рис. 42).

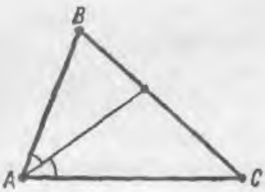


Рис. 42

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны треугольника (рис. 43).

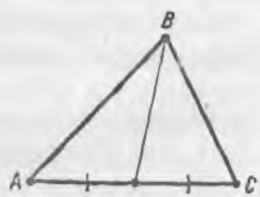


Рис. 43

Теорема 3.5. ***В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.***

Доказательство. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AB (рис. 44). Пусть CD — медиана, проведенная к основанию. Треугольники CAD и CBD равны по первому признаку равенства треугольников. (У них стороны AC и BC равны, потому что треугольник ABC равнобедренный. Углы CAD и CBD равны по теореме 3.3. Стороны AD и BD равны, потому что D — середина отрезка AB.)

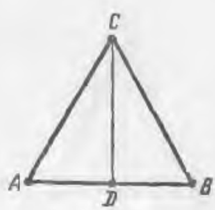


Рис. 44

Из равенства треугольников следует равенство углов: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Так как углы ACD и BCD равны, то CD — биссектриса. Так как углы ADC и BDC смежные и равны, то они прямые, поэтому CD — высота треугольника. Теорема доказана.

З а д а ч а (27). Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и CD — его биссектриса (см. рис. 44). Треугольники ACD и BCD равны по второму признаку. (У них стороны AC и BC равны как боковые стороны равнобедренного треугольника ABC; углы при вершине C равны потому, что CD — биссектриса угла ACB, а углы при вершинах A и B равны как углы при основании равнобедренного треугольника ABC.) Из равенства треугольников следует равенство сторон AD и BD. Значит, CD — медиана треугольника ABC. По теореме 3.5 она является и высотой.

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Т е о р е м а 3.6 (признак равенства треугольников по трем сторонам). ***Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 45). Докажем, что эти треугольники равны.

По аксиоме существования треугольника, равного данному, существует треугольник $A_1B_1C_2$, равный треугольнику ABC, у которого вершина C_2 лежит в одной полуплоскости с вершиной C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 45).

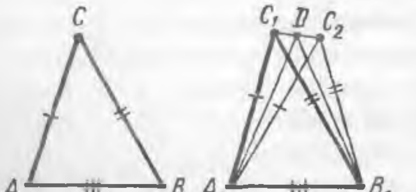


Рис. 45

Допустим, что вершина C_2 не лежит ни на луче A_1C_1, ни на луче B_1C_1. Пусть D — середина отрезка C_1C_2. Треугольники $A_1C_1C_2$ и $B_1C_1C_2$ — равнобедренные с общим основанием C_1C_2. По теореме 3.5 их медианы A_1D и B_1D являются высотами. Значит, прямые A_1D и B_1D перпендикулярны прямой C_1C_2. А так как через точку D прямой C_1C_2 можно провести только одну перпендикулярную ей прямую (теорема 2.3), то эти прямые должны совпадать. Но они различны, потому что точка D по построению не лежит на прямой A_1B_1. Мы пришли к противоречию. Значит, вершина C_2 лежит либо на луче A_1C_1, либо на луче B_1C_1. В первом случае точка C_2 совпадает с C_1, так как $A_1C_1 = AC$. А это значит, что треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$. Точно так же приходим к выводу о равенстве треугольников во втором случае. Теорема доказана.

Задача (28). У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Решение. На продолжении стороны AC отложим отрезок CD, равный AC (рис. 46). Треугольники ABC и DBC равны по первому признаку. У них углы при вершине C прямые, а значит, равны, сторона BC общая, а стороны AC и CD равны по построению. Из равенства треугольников следует равенство сторон AB и DB.

Отложим на продолжении стороны A_1C_1 отрезок C_1D_1, равный стороне A_1C_1. Так же, как и для треугольников ABC и DBC доказываем, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $D_1B_1C_1$ равны. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $A_1B_1 = D_1B_1$.

Теперь по третьему признаку заключаем, что треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны. У них $AB = A_1B_1$ по условию, $BD = B_1D_1$, так как $BD = AB$, а $B_1D_1 = A_1B_1$, наконец, $AD = A_1D_1$, так как $AC = A_1C_1$. Из равенства треугольников ABD и $A_1B_1D_1$ следует равенство их углов: $\angle A = \angle A_1$.

Теперь приходим к выводу о равенстве исходных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ по первому признаку. У них $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ по условию, а $\angle A = \angle A_1$ по доказанному.

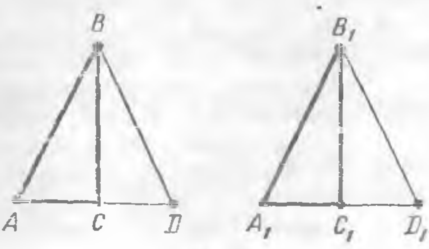


Рис. 46

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сформулируйте и докажите первый признак равенства треугольников.
2. Сформулируйте и докажите второй признак равенства треугольников.
3. Какой треугольник называется равнобедренным? Какие стороны равнобедренного треугольника называются боковыми сторонами? Какая сторона называется основанием?
4. Докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
5. Какой треугольник называется равносторонним?
6. Докажите, что если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.
7. Объясните, что такое обратная теорема. Приведите пример. Для всякой ли теоремы верна обратная?
8. Что такое высота треугольника?
9. Что такое биссектриса треугольника?
10. Что такое медиана треугольника?
11. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.
12. Докажите третий признак равенства треугольников.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок $AC = 10$ м?
2. Через середину отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что каждая точка этой прямой одинаково удалена от точек A и B.
3. От вершины C равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки: CA_1 — на стороне CA и CB_1 — на стороне CB. Докажите равенство треугольников: 1) CAB_1 и CBA_1; 2) ABB_1 и BAA_1.
4. На основании AB равнобедренного треугольника ABC даны точки A_1 и B_1. Известно, что $AB_1 = BA_1$. Докажите, что треугольники AB_1C и BA_1C равны.
5. На стороне AB треугольника ABC взята точка D, а на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1. Известно, что треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ равны и отрезки DB и D_1B_1 равны. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
6. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, между которыми нельзя пройти по прямой (рис. 47), выбирают такую точку C, из которой

можно пройти и к точке A, и к точке B и из которой видны обе эти точки. Провешивают[1] расстояния AC и BC, продолжают их за точку C и отмеряют $CD = AC$ и $EC = CB$. Тогда отрезок ED равен искомому расстоянию. Объясните почему.

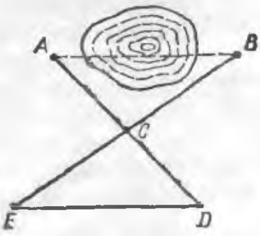


Рис. 47

7. Чтобы измерить на местности расстояние между двумя точками A и B, из которых одна (точка A) недоступна, провешивают направление отрезка AB (рис. 48) и на его продолжении отмеряют произвольный отрезок BE. Выбирают на местности точку D, из которой видна точка A и можно пройти к точкам B и E. Провешивают прямые BDQ и EDF и отмеряют $FD = DE$ и $DQ = BD$. Затем идут по прямой FQ, глядя на точку A, пока не найдут точку H, которая лежит на прямой AD. Тогда HQ равно искомому расстоянию. Докажите.

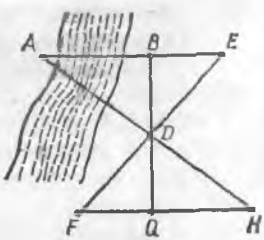


Рис. 48

8. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите равенство треугольников ACO и DBO, если известно, что угол ACO равен углу DBO и $BO = CO$.
9. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Докажите равенство треугольников BAO и DCO, если известно, что угол BAO равен углу DCO и $AO = CO$.
10. Периметр (сумма длин сторон) равнобедренного треугольника равен 1 м, а основание равно 0,4 м. Найдите длину боковой стороны.
11. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона равна 2 м. Найдите основание.
12. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если: 1) основание меньше боковой стороны на 3 м; 2) основание больше боковой стороны на 3 м.
13. Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.
14. Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 13.
15. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки C_1 и C_2. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если треугольники ABC_1 и BAC_2 равны.

[1] Отмечают направление шестами-вехами.

16. Треугольники ACC_1 и BCC_1 равны. Их вершины A и B лежат по разные стороны от прямой CC_1. Докажите, что треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные.
17. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются также вершинами равнобедренного треугольника.
18. Докажите, что середины сторон равностороннего треугольника являются также вершинами равностороннего треугольника.
19. Докажите, что у равнобедренного треугольника: 1) биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны; 2) медианы, проведенные из тех же вершин, тоже равны.
20. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: 1) медианы, проведенные из вершин A и A_1, равны; 2) биссектрисы, проведенные из вершин A и A_1, равны.
21. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, причем отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB, то треугольник CDE тоже равнобедренный с основанием CD.
22. Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе этого угла и стороне, прилежащей к этому углу.
23. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BM. На ней взята точка D. Докажите равенство треугольников: 1) ABD и CBD; 2) AMD и CMD.
24. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если у него: 1) медиана BD является высотой; 2) высота BD является биссектрисой.
25. *На стороне AB треугольника ABC взята точка D.* Найдите длину отрезка CD, если периметры треугольников ABC, ACD и BCD соответственно равны 50 м, 45 м и 35 м.
26. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. Найдите ее длину, если периметр треугольника ABC равен 50 м, а треугольника ABD — 40 м.
27. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является медианой и высотой.
28. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
29. Докажите, что у равнобедренного треугольника высота, опущенная на основание, является медианой и биссектрисой.

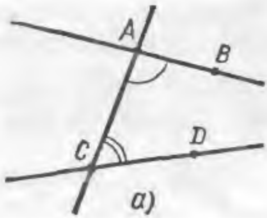
30. Треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные с общим основанием AB. Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1.
31. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны, то треугольники CDE_1 и CDE_2 тоже равны.
32. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников ACD и BDC.
33. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.
34. Отрезки AB и CD пересекаются. Докажите, что если отрезки AC, CB, BD и AD равны, то луч AB является биссектрисой угла CAD и луч CD — биссектрисой угла ACB.
35. Докажите, что в задаче 34 прямые AB и CD перпендикулярны.
36. Треугольники ABC и BAD равны, причем точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что: 1) треугольники CBD и DAC равны; 2) прямая CD делит отрезок AB пополам.
37. Отрезки равной длины AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB.
38. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины.
39. Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углам, которые образует с ней медиана.
40. Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

§ 4. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Теорема 4.1. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.*

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Допустим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке C. Значит, через точку C проходят две прямые, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной. Теорема доказана.



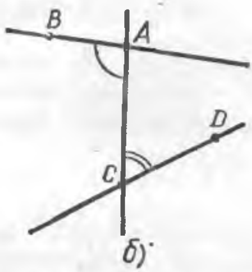


Рис. 49

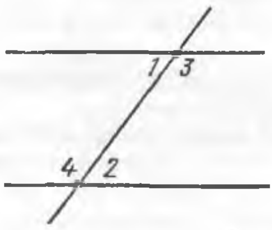


Рис. 50

Пусть AB и CD — две прямые. Пусть AC — третья прямая, пересекающая прямые AB и CD (рис. 49). Прямая AC по отношению к прямым AB и CD называется *секущей*. Углы, которые образуются при пересечении прямых AB и CD секущей AC, имеют специальные названия. Если точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними односторонними* (рис. 49, *а*). Если точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними накрест лежащими* (рис. 49, *б*).

Секущая AC образует с прямыми AB и CD две пары внутренних односторонних и две пары внутренних накрест лежащих углов. Из свойства смежных углов следует, что ***если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны, а сумма внутренних односторонних углов каждой пары равна 180°***. Обратно, ***если сумма внутренних односторонних углов одной пары равна 180°, то сумма внутренних односторонних углов другой пары тоже равна 180°, а внутренние накрест лежащие углы каждой пары равны***. Поясним первое утверждение.

Посмотрите на рисунок 50. Если внутренние накрест лежащие углы *1* и *2* равны, то внутренние накрест лежащие углы *3* и *4*, как смежные углам *1* и *2*, тоже равны. Углы *1* и *4* являются внутренними односторонними. Так как угол *4* дополняет угол *2* до 180°, а угол *2* равен углу *1*, то сумма углов *1* и *4* равна 180°.

Теорема 4.2. ***Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны*** (рис. 50).

Доказательство. Допустим, что прямые a и b не параллельны; следовательно, они пересекаются в некоторой точке C (рис. 51). Отложим на продолжении отрезка CA отрезок AD, равный отрезку BC, а на продолжении отрезка CB отметим какую-нибудь точку E. Треугольники BAC и ABD равны по первому признаку равенства треугольников. У них сторона AB общая, углы CBA и DAB равны по условию теоремы как накрест лежащие, а $AD = BC$ по построению.

Из равенства треугольников следует равенство углов ABD и BAC. А угол BAC равен накрест лежащему углу ABE. Таким образом, углы ABD и ABE равны. А так как они отложены от полупрямой BA в одну полуплоскость, то прямые BD и BE совпадают. Но это невозможно, потому что точка D не лежит на прямой BE. Следовательно, исходное предположение о том, что прямые a и b не параллельны, неверно. Теорема доказана.

Теоремы 4.1 и 4.2 выражают *признаки параллельности прямых*.

Задача (3). Даны прямая AB и точка C, не лежащая на этой прямой. Докажите, что через точку C можно провести прямую, параллельную прямой AB.

Решение. Прямая AC разбивает плоскость на две полуплоскости (рис. 52). Точка B лежит в одной из них. Отложим от полупрямой CA в другую полуплоскость угол ACD, равный углу CAB. Тогда прямые AB и CD будут параллельны. В самом деле, для этих прямых и секущей AC углы BAC и DCA внутренние накрест лежащие. А так как они равны, то по теореме 4.2 прямые AB и CD параллельны.

Сопоставляя утверждение задачи 3 и аксиомы V (основного свойства параллельных прямых), приходим к важному выводу:

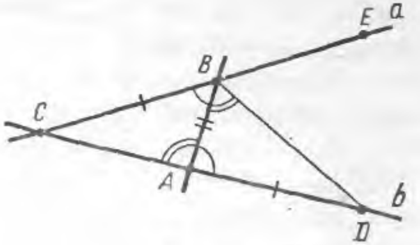


Рис. 51

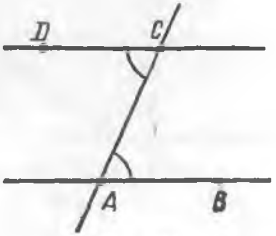


Рис. 52

через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую, и только одну.

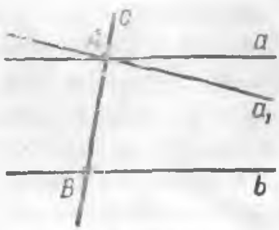


Рис. 53

Теорема 4.3 (обратная теореме 4.2). *Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°.*

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны, а прямая c их пересекает. Проведем через точку A прямую a_1 так, чтобы сумма внутренних односторонних углов, образованных секущей c и прямыми a_1 и b, была равна 180° (рис. 53). Тогда по теореме 4.2 прямая a_1 будет параллельна прямой b. Но через точку A проходит только одна прямая, параллельная b. Следовательно, прямая a совпадает с прямой a_1. Итак, сумма внутренних односторонних углов, образованных секущей c и параллельными a и b, равна 180°, а значит, накрест лежащие углы равны. Теорема доказана полностью.

Из теорем 4.2 и 4.3 следует, что *две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой* (рис. 54).

Задача (7). Угол ABC равен 80°, а угол BCD равен 120°. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными? Обоснуйте ответ.

Решение. Для прямых AB и CD и секущей BC углы ABC и BCD являются либо внутренними односторонними

Рис. 54

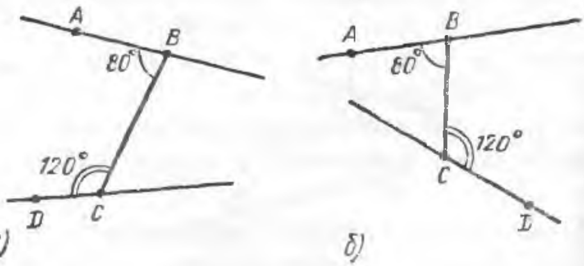


Рис. 55

(рис. 55, *а*), либо внутренними накрест лежащими (рис. 55, *б*). Если бы прямые AB и CD были параллельными, то либо $\angle ABC = \angle BCD$, если углы накрест лежащие, либо $\angle ABC + \angle BCD = 180°$, если углы односторонние. Но $80° \neq 120°$ и $80° + 120° = 200° \neq 180°$. Значит, прямые AB и CD не могут быть параллельными.

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема 4.4. *Сумма углов треугольника равна 180°.*

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 56). Отметим середину O стороны BC. Отложим на продолжении отрезка AO отрезок OD, равный отрезку OA. Треугольники BOD и COA равны, так как у них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OB = OC$ и $OA = OD$ по построению. Из равенства треугольников следует, что угол DBO равен углу ACO.

Для прямых AC, BD и секущей BC углы DBO и ACO являются внутренними накрест лежащими. Действительно, точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC, так как отрезок AD пересекает прямую BC (в точке O). Из равенства внутренних накрест лежащих углов DBO и ACO по теореме 4.2 следует, что прямые AC и BD параллельны.

Для прямых AC, BD и секущей AB углы DBA и CAB являются внутренними односторонними. Действительно, точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, именно в той полуплоскости, где лежит точка O. Так как прямые AC и BD параллельны, то сумма внутренних односторонних углов CAB и DBA равна 180°.

Угол DBA равен сумме углов DBC и ABC, так как луч BC пересекает отрезок AD с концами на сторонах угла ABD. По доказанному угол DBC равен углу ACB. Следовательно, сумма углов треугольника ABC, т. е. $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$, равна сумме внутренних односторонних углов при параллельных AC и BD и секущей AB, т. е. равна 180°. Теорема доказана.

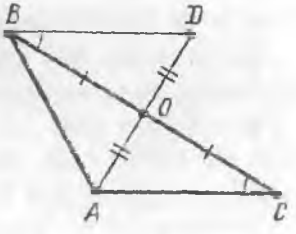


Рис. 56

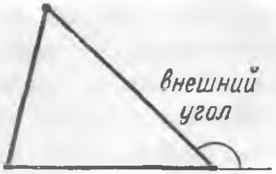


Рис. 57

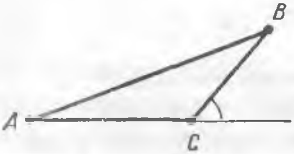


Рис. 58

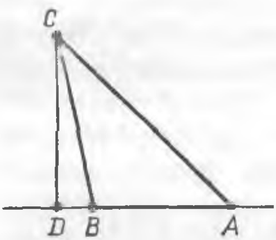


Рис. 59

Из теоремы 4.4 следует, что ***у любого треугольника хотя бы два угла острые.***

Доказательство. Допустим, что у треугольника только один острый угол или вообще нет острых углов. Тогда у этого треугольника есть два угла, каждый из которых не меньше $90°$. Сумма этих двух углов уже не меньше $180°$. А это невозможно, так как сумма всех трех углов треугольника равна $180°$.

Задача (12). Чему равны углы равностороннего треугольника?

Решение. У равностороннего треугольника, как мы знаем, все углы равны (задача 13 § 3). Так как они в сумме дают $180°$, то каждый из них равен $60°$.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине (рис. 57). Чтобы не путать угол треугольника при данной вершине с внешним углом при этой же вершине, его называют *внутренним углом.*

Теорема 4.5. ***Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.***

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 58). По теореме 4.4 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Отсюда следует, что $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. В правой части этого равенства стоит градусная мера внешнего угла треугольника при вершине C. Теорема доказана.

Из теоремы 4.5 следует, что ***внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.***

Задача (28). В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трех точек A, B, D лежит между двумя другими, если углы A и B треугольника острые?

Решение. Точка B не может лежать между A и D. Если бы она лежала между A и D (рис. 59), то острый угол

ABC как внешний угол треугольника CBD был бы больше прямого угла CDB. Точно так же доказывается, что и точка A не может лежать между B и D. Значит, точка D лежит между A и B.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то у прямоугольного треугольника только один прямой угол. Два других угла прямоугольного треугольника острые. Острые углы дополняют друг друга до 90°. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами* (рис. 60).

Для прямоугольных треугольников, кроме трех известных нам признаков равенства, имеются другие признаки. Вот эти признаки:

1. ***Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*** (Признак равенства по гипотенузе и острому углу.)

2. ***Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*** (Признак равенства по катету и противолежащему углу.)

3. ***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.*** (Признак равенства по гипотенузе и катету.)

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — прямоугольные треугольники с прямыми углами C и C_1 (рис. 61), для которых выполняется одно из условий:

1) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$;

2) $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$;

3) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Рис. 60

Рис. 61

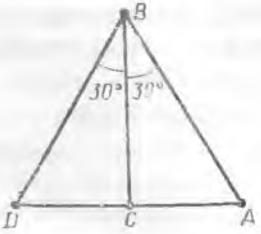


Рис. 62

Докажем, что треугольники равны.

Для доказательства первых двух признаков достаточно заметить, что если $\angle A = \angle A_1$, то $\angle B = \angle B_1$. А тогда треугольники в обоих случаях равны по второму признаку равенства треугольников.

Доказательство признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету было дано в решении задачи 28 § 3.

З а д а ч а (35). Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом B, равным 30° (рис. 62). Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный AC. Треугольники ABC и DBC равны по первому признаку. У них углы при вершине C прямые, сторона BC общая, а $AC = CD$ по построению. Из равенства треугольников следует, что $\angle D = \angle A = 60°$, $\angle CBD = \angle CBA = 30°$, а значит, $\angle ABD = 60°$. Отсюда следует, что треугольник ABD равносторонний. Поэтому $AC = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB$, что и требовалось доказать.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ПРЯМОЙ

Т е о р е м а 4.6. *Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — данная прямая и A — не лежащая на ней точка (рис. 63). Проведем через точку A прямую b, параллельную прямой a (задача 3 § 4). Проведем теперь через точку A прямую c, перпендикулярную прямой b. Она будет перпендикулярна прямой a (теорема 4.3) и пересечет ее в некоторой точке B. Отрезок AB — перпендикуляр, опущенный из A на прямую a.

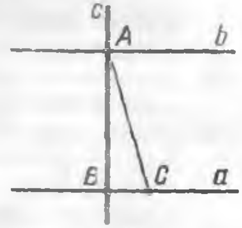


Рис. 63

Допустим, что из точки A можно опустить на прямую a два перпендикуляра: AB и AC. Тогда у треугольника ABC было бы два прямых угла, что невозможно. Теорема доказана.

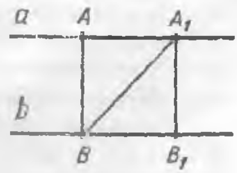


Рис. 64

Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется *расстоянием от точки до прямой.*

З а д а ч а (42). Докажите, что расстояния от любых двух точек прямой до параллельной прямой равны.

Р е ш е н и е. Пусть a и b — параллельные прямые (рис. 64). Отметим на прямой a две точки A и A_1 и опустим из них перпендикуляры AB и A_1B_1 на прямую b. Прямоугольные треугольники ABA_1 и B_1A_1B равны по гипотенузе и острому углу. У них гипотенуза BA_1 общая, а острые углы AA_1B и B_1BA_1 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных a и b и секущей BA_1. В самом деле, эти углы либо внутренние накрест лежащие, либо внутренние односторонние. Они не могут быть внутренними односторонними, так как, будучи острыми, не дают в сумме 180°. Из равенства треугольников следует равенство сторон AB и A_1B_1, т. е. равенство расстояний от точек A и A_1 прямой a до прямой b.

Как видим, расстояния от всех точек прямой до параллельной прямой равны. Поэтому говорят, что параллельные прямые — равноотстоящие. *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.
2. Объясните, какие углы называются внутренними одно-

сторонними. Какие углы называются внутренними накрест лежащими?

3. Докажите, что если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны, а сумма внутренних односторонних углов каждой пары равна 180°.
   Обратно, если сумма внутренних односторонних углов одной пары равна 180°, то сумма внутренних односторонних углов другой пары тоже равна 180°, а внутренние накрест лежащие углы каждой пары равны.
4. Сформулируйте и докажите признак параллельности прямых по их углам с секущей.
5. Докажите, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую. Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через точку, не лежащую на этой прямой?
6. Докажите, что если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°.
7. Докажите, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
8. Вопросы к доказательству теоремы 4.4 о сумме углов треугольника (см. рис. 56):
   а) объясните, почему углы CBD и BCA являются внутренними накрест лежащими для прямых AC, BD и секущей BC;
   б) объясните, почему углы ABD и BAC являются внутренними односторонними для прямых AC, BD и секущей AB;
   в) объясните, почему угол ABD равен сумме углов ABC и DBC.
9. Докажите, что у любого треугольника по крайней мере два угла острые.
10. Что такое внешний угол треугольника?
11. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.
12. Докажите, что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.
13. Какой треугольник называется прямоугольным?
14. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
15. Какая сторона прямоугольного треугольника называется гипотенузой? Какие стороны называются катетами?
16. Сформулируйте и докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.

17. Докажите, что из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.
18. Что называется расстоянием от точки до прямой?
19. Объясните, что такое расстояние между параллельными прямыми.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
2. Дан треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка B_1, а на стороне AC — точка C_1. Назовите внутренние односторонние и внутренние накрест лежащие углы при прямых AB, AC и секущей B_1C_1.
3. Даны прямая AB и точка C, не лежащая на этой прямой. Докажите, что через точку C можно провести прямую, параллельную прямой AB.
4. Докажите, что биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных параллельными и секущей, параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.
5. Отрезки AB и CD пересекаются в точке E и делятся этой точкой пополам. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
6. Треугольники ABC и BAD равны. Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.
7. Угол ABC равен $80°$, а угол BCD равен $120°$. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными? Обоснуйте ответ.
8. Разность двух внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равна $30°$. Найдите эти углы.
9. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей равна $150°$. Чему равны эти углы?
10. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен $72°$. Найдите остальные семь углов.
11. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен $30°$. Может ли один из остальных семи углов равняться $70°$? Объясните ответ.
12. Чему равны углы равностороннего треугольника?
13. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых?
14. Найдите неизвестный угол треугольника, если у него

два угла равны: 1) 50° и 30°; 2) 40° и 75°; 3) 65° и 80°; 4) 25° и 120°.

15. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.

16. Может ли в треугольнике быть: 1) два тупых угла; 2) тупой и прямой углы; 3) два прямых угла?

17. Может ли быть тупым угол при основании равнобедренного треугольника?

18. Найдите угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, если угол при основании у него равен: 1) 40°, 2) 55°, 3) 72°.

19. Найдите угол при основании равнобедренного треугольника, если угол между боковыми сторонами равен: 1) 80°, 2) 120°, 3) 30°.

20. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите остальные углы.

21. Один из углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите остальные углы. Сколько решений имеет задача?

22. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Найдите углы треугольника, если угол ADC равен α.

23. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при вершине B, равным 36°, проведена биссектриса AD. Докажите, что треугольники CDA и ADB равнобедренные.

24. В треугольнике ABC проведены биссектрисы из вершин A и B. Точка их пересечения обозначена D. Найдите угол ADB, если: 1) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; 2) $\angle C = \gamma$.

25. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите углы треугольника.

26. Найдите углы треугольника, зная, что внешние углы при двух его вершинах равны 120° и 150°.

27. Два внешних угла треугольника равны 100° и 150°. Найдите третий внешний угол.

28. В треугольнике ABC проведена высота CD. Какая из трех точек A, B, D лежит между двумя другими, если углы A и B треугольника острые?

29. Из вершины прямого угла треугольника ABC проведена высота BD. Найдите угол CBD, зная, что $\angle A = \alpha$.

30. Из вершины тупого угла B треугольника ABC проведена высота BD. Найдите углы треугольников ABD и CBD, зная, что $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

31. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

32. Сумма внешних углов треугольника ABC при вершинах

A и B, взятых по одному для каждой вершины, равна $240°$. Чему равен угол C треугольника?

33. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC отложены отрезки $AD = AB$ и $CE = CB$. Как найти углы треугольника DBE, зная углы треугольника ABC?
34. У треугольника один из внутренних углов равен $30°$, а один из внешних $40°$. Найдите остальные внутренние углы треугольника.
35. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом $30°$ катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.
36. Найдите углы прямоугольного равнобедренного треугольника.
37. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABD.
38. Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMC$, если $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$.
39. В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника.
40. Прямая a пересекает отрезок BC в его середине. Докажите, что точки B и C находятся на одинаковом расстоянии от прямой a.
41. Отрезок BC пересекает прямую a в точке O. Расстояния от точек B и C до прямой a равны. Докажите, что точка O является серединой отрезка BC.
42. Докажите, что расстояния от любых двух точек прямой до параллельной прямой равны.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

ОКРУЖНОСТЬ

Определение. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется *центром окружности*.

Расстояние от точек окружности до ее центра называется *радиусом окружности*. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром (рис.65).

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. На рисунке 66 BC — хорда, AD — диаметр.

Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.

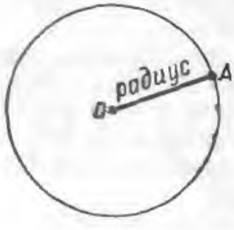


Рис. 65

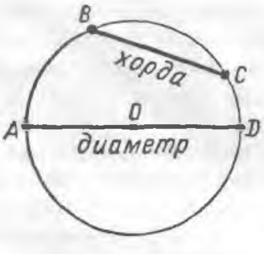


Рис. 66

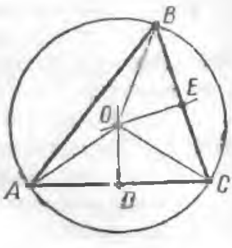


Рис. 67

Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник и O — центр описанной около него окружности (рис. 67). Треугольник AOC равнобедренный; у него стороны OA и OC равны как радиусы. Медиана OD этого треугольника одновременно является его высотой. Поэтому центр окружности лежит на прямой, перпендикулярной стороне AC и проходящей через ее середину. Точно так же доказывается, что центр окружности лежит на перпендикулярах к двум другим сторонам треугольника.

Замечание. Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, часто называют *серединным перпендикуляром*. В связи с этим иногда говорят, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*. При этом данная точка окружности называется *точкой касания*. На рисунке 68 прямая a проведена через точку окружности A перпендикулярно к радиусу OA. Прямая a является касательной к окружности. Точка A является точкой касания. Можно сказать также, что окружность касается прямой a в точке A.

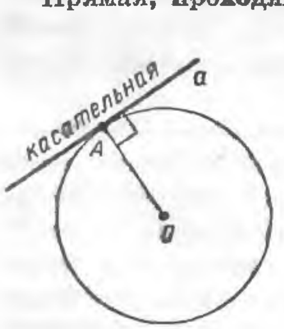


Рис. 68

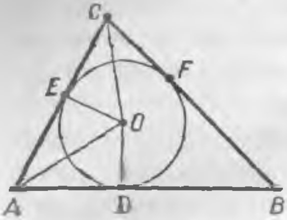


Рис. 69

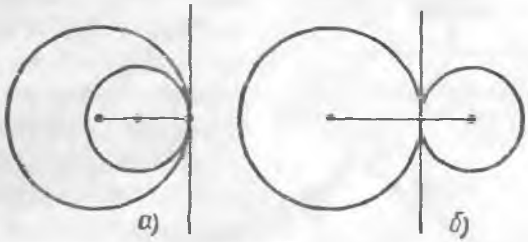


Рис. 70

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр вписанной в него окружности, D, E и F — точки касания окружности со сторонами (рис. 69). Прямоугольные треугольники AOD и AOE равны по гипотенузе и катету. У них гипотенуза AO общая, а катеты OD и OE равны как радиусы. Из равенства треугольников следует равенство углов OAD и OAE. А это значит, что точка O лежит на биссектрисе треугольника, проведенной из вершины A. Точно так же доказывается, что точка O лежит на двух других биссектрисах треугольника.

Говорят, что две окружности, имеющие общую точку, *касаются* в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную (рис. 70). Касание окружностей называется *внутренним*, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной (рис. 70, *а*). Касание окружностей называется *внешним*, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной (рис. 70, *б*).

ЧТО ТАКОЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

В задачах на построение идет речь о построении геометрической фигуры с помощью данных чертежных инструментов. Такими инструментами чаще всего являются линейка и циркуль. Решение задачи состоит не столько в построении фигуры, сколько в решении вопроса о том, как это сделать, и соответствующем доказательстве. Задача считается решен-

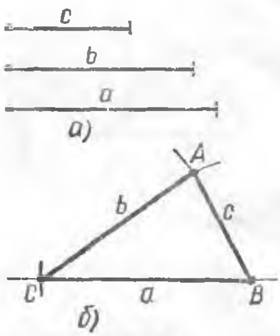


Рис. 71

ной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

С помощью линейки как инструмента геометрических построений можно провести произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через данную точку; прямую, проходящую через две данные точки. Никаких других операций выполнять линейкой нельзя. В частности, нельзя откладывать линейкой отрезки, даже если на ней имеются деления.

Циркуль как инструмент геометрических построений позволяет описать из данного центра окружность данного радиуса. В частности, циркулем можно отложить данный отрезок на данной прямой от данной точки.

Рассмотрим простейшие задачи на построение.

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА С ДАННЫМИ СТОРОНАМИ

Задача 5.1. *Построить треугольник с данными сторонами a, b, c* (рис. 71, a).

Решение. С помощью линейки проводим произвольную прямую и отмечаем на ней произвольную точку B (рис. 71, *б*). Раствором циркуля, равным a, описываем окружность с центром B и радиусом a. Пусть C — точка ее пересечения с прямой. Теперь раствором циркуля, равным c, описываем окружность из центра B, а раствором циркуля, равным b, описываем окружность из центра C. Пусть A — точка пересечения этих окружностей. Проведем отрезки AB и AC. Треугольник ABC имеет стороны, равные a, b, c.

ПОСТРОЕНИЕ УГЛА, РАВНОГО ДАННОМУ

Задача 5.2. *Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.*

Решение. Проведем произвольную окружность с центром в вершине A данного угла (рис. 72, *а*). Пусть B и C — точки пересечения окружности со сторонами угла. Радиусом AB проведем окружность с центром в точке O — начальной точке данной полупрямой (рис. 72, *б*). Точку пересечения этой окружности с данной полупрямой обозначим B_1. Опишем окружность с центром B_1 и радиусом BC. Точка C_1 пересечения построенных окружностей в указанной полуплоскости лежит на стороне искомого угла. Для доказательства достаточно заметить, что треугольники ABC и OB_1C_1 равны как треугольники с соответственно равными сторонами. Углы A и O являются соответствующими углами этих треугольников.

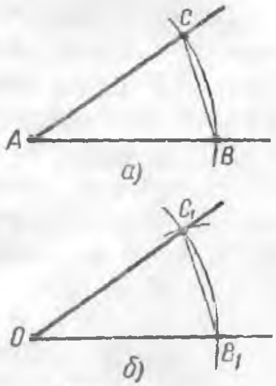


Рис. 72

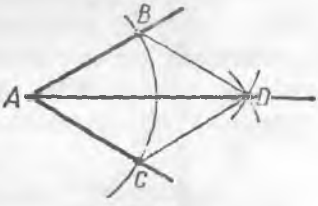


Рис. 73

ПОСТРОЕНИЕ БИССЕКТРИСЫ УГЛА

Задача 5. 3. *Построить биссектрису данного угла.*

Решение. Из вершины A данного угла, как из центра, описываем окружность произвольного радиуса (рис. 73). Пусть B и C — точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C тем же радиусом описываем окружности. Пусть D — точка их пересечения, отличная от A. Проводим полупрямую AD. Она делит угол BAC пополам. Это следует из равенства треугольников ABD и ACD, у которых углы DAB и DAC являются соответствующими.

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ

Задача 5. 4. *Разделить отрезок пополам.*

Решение. Пусть AB — данный отрезок (рис. 74). Из точек A и B радиусом AB описываем окружности. Пусть C и C_1 — точки пересечения этих окружностей. Они лежат

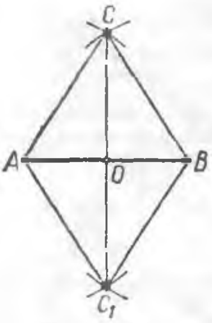


Рис. 74

в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Отрезок CC_1 пересекает прямую AB в некоторой точке O. Эта точка и есть середина отрезка AB.

Действительно, треугольники CAC_1 и CBC_1 равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда следует равенство углов ACO и BCO. Треугольники ACO и BCO равны по первому признаку равенства треугольников. Стороны AO и BO этих треугольников являются соответствующими, а поэтому они равны. Таким образом, O—середина отрезка AB.

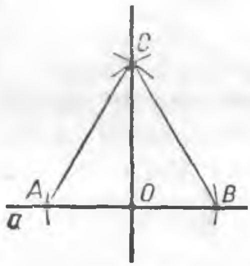


Рис. 75

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПРЯМОЙ

Задача 5. 5. ***Через данную точку O провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.***

Решение. Возможны два случая:

1) точка O лежит на прямой a;

2) точка O не лежит на прямой a.

Рассмотрим первый случай (рис. 75).

Из точки O проводим произвольным радиусом окружность. Она пересекает прямую a в двух точках: A и B. Из точек A и B проводим окружности радиусом AB. Пусть C — точка их пересечения. Искомая прямая проходит через точки O и C. Перпендикулярность прямых OC и AB следует из равенства углов при вершине O треугольников ACO и BCO. Эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников.

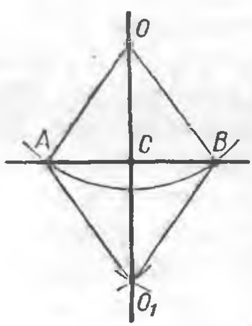


Рис. 76

Рассмотрим второй случай (рис. 76).

Из точки O проводим окружность, пересекающую прямую a. Пусть A и B — точки ее пересечения с прямой a. Из точек A и B тем же радиусом проводим окружности. Пусть O_1 — точка их пересечения, лежащая в полуплоскости, отличной от той, в которой лежит точка O. Искомая прямая проходит через точки O и O_1. Докажем это. Обозначим через C точку пересечения прямых AB и OO_1. Треугольники AOB и AO_1B равны по третьему признаку. Поэтому угол OAC равен углу O_1AC. А тогда треугольники OAC и O_1AC равны по первому признаку. Значит, их углы ACO и ACO_1 равны. А так как они смежные, то они прямые. Таким образом, OC — перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую a.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК

Одним из методов решения задач на построение является метод геометрических мест. *Геометрическим местом точек* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. Например, окружность можно определить как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки.

Важное геометрическое место точек дает следующая теорема:

Теорема 5.6. ***Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.***

Доказательство. Пусть A и B — данные точки, a — прямая, проходящая через середину O отрезка AB перпендикулярно к нему (рис. 77). Мы должны доказать, что: 1) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B; 2) каждая точка D плоскости, равноудаленная от точек A и B, лежит на прямой a. То, что каждая точка C прямой a находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, следует из равенства треугольников AOC и BOC. У этих треугольников углы при вершине O прямые, сторона OC общая, а $AO = OB$, так как O — середина отрезка AB. Покажем теперь, что каждая точка D плоскости, равноудаленная от точек A и B, лежит на прямой a.

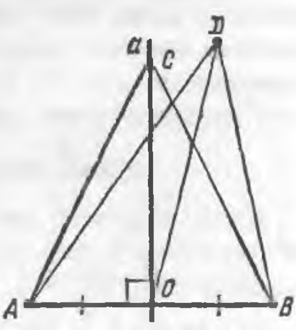


Рис. 77

Рассмотрим треугольник ADB. Он равнобедренный, так как $AD = BD$. В нем DO — медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана, проведенная к основанию, является высотой. По теореме 2.3 прямая OD совпадает с a, а значит, точка D лежит на прямой a. Теорема доказана.

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ

Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем. Пусть, решая задачу на построение, нам надо найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, т. е. является их точкой пересечения. Если эти геометрические места простые (скажем, состоят из прямых и окружностей), то мы можем их построить и найти интересующую нас точку X. Приведем пример.

Задача (38). Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Решение. Искомая точка X удовлетворяет двум условиям: 1) она одинаково удалена от точек A и B; 2) она находится на данном расстоянии от точки C. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (рис. 78). Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке C. Искомая точка X лежит на пересечении этих геометрических мест.

УГЛЫ, ВПИСАННЫЕ В ОКРУЖНОСТЬ

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным* в окружность (рис. 79).

Теорема 5.7. ***Все вписанные в окружность углы, стороны которых проходят через две данные точки окружности, а вер-***

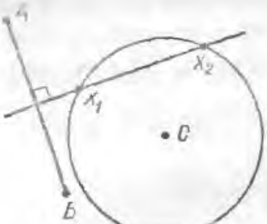


Рис. 78

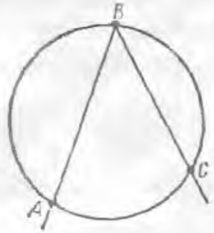


Рис. 79

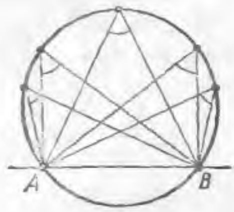


Рис. 80

шины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, равны (рис. 80).

Доказательство. Пусть ABC — угол, вписанный в окружность с центром O (рис. 81). Проведем диаметр BD. Треугольники AOB и COB равнобедренные. По свойству внешнего угла треугольника (теорема 4.5) $\angle AOD = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle OBA$. Отсюда $\angle OBA = \frac{1}{2}\angle AOD$. Аналогично $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle COD$.

На рисунке 81 представлены различные случаи взаимного расположения сторон вписанного угла, центра окружности O и диаметра BD. На рисунке 81, *а* и *в* точки B и O лежат по одну сторону от прямой AC, а на рисунке 81, *б* — по разные. На рисунке 81, *а* и *б* диаметр BD проходит между сторонами угла, а на рисунке 81, *в* не проходит между ними.

В случае, который представлен на рисунке 81,*а*,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle COD) = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

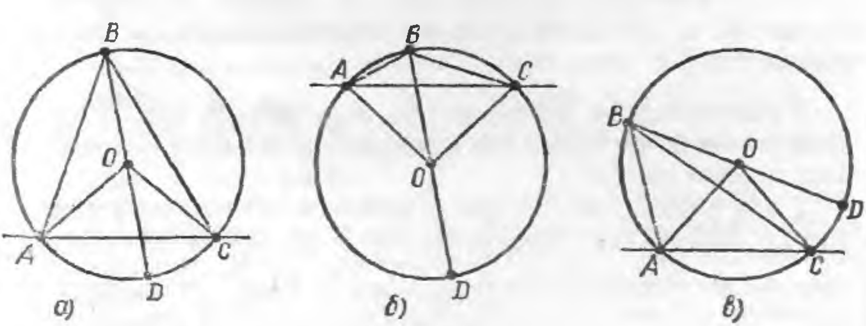


Рис. 81

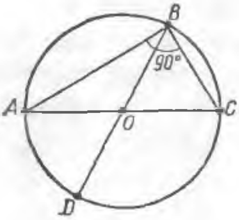


Рис. 82

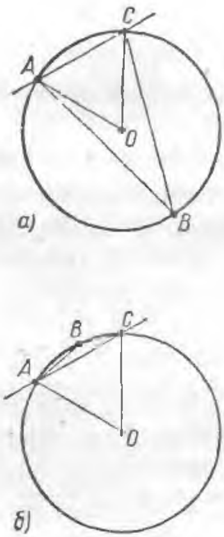


Рис. 83

В случае, представленном на рисунке 81, *б*,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle COD) = \frac{1}{2}[(180^\circ - \angle AOB) + (180^\circ - \angle COB)] = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC.$$

В случае, представленном на рисунке 81, *в*,

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AOD - \angle COD) = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Если хорда AC является диаметром (рис. 82), то

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle COD) = 90^\circ.$$

Мы видим, что ***если вершина вписанного угла B и центр O лежат по одну сторону от прямой AC, то*** $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$; ***если вершина B и центр O лежат по разные стороны от прямой AC, то*** $\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC$.

Если хорда AC является диаметром, то $\angle ABC = 90^\circ$.

Таким образом, все вписанные в окружность углы, стороны которых проходят через две данные точки окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, имеют одну и ту же градусную меру, а значит, равны. Теорема доказана.

З а д а ч а (48). Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности? (Два случая.)

Р е ш е н и е. Если точка B лежит по одну сторону с центром O относительно прямой AC (рис. 83, *а*), то по свойству вписанного угла $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Так как по условию хорда AC равна радиусу, то треугольник AOC равносторонний, а значит, угол AOC равен 60°. Поэтому $\angle ABC = 30°$. Если точки B и O лежат по разные стороны от прямой AC (рис. 83, *б*), то по свойству вписанного угла $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2} \angle AOC = 150°$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что такое окружность, центр окружности, радиус?
2. Что такое хорда окружности? Какая хорда называется диаметром?
3. Какая окружность называется описанной около треугольника?
4. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
5. Какая прямая называется касательной к окружности?
6. Какая окружность называется вписанной в треугольник?
7. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.
8. Что значит: окружности касаются в данной точке?
9. Какое касание окружностей называется внешним, какое — внутренним?
10. Объясните, как построить треугольник по трем сторонам.
11. Объясните, как отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.
12. Объясните, как разделить данный угол пополам.
13. Объясните, как разделить отрезок пополам.
14. Объясните, как через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.
15. Что такое геометрическое место точек?
16. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек?
17. В чем состоит метод геометрических мест, используемый при решении задач на построение? Приведите пример.
18. Какой угол называется вписанным в окружность?
19. Сформулируйте и докажите теорему об углах, вписанных в окружность.
20. Чему равен вписанный в окружность угол ABC, если: а) вершина угла B и центр окружности O лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC; б) вершина угла B и центр O лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC; в) хорда AC является диаметром окружности?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что любой луч, исходящий из центра окружности, пересекает окружность в одной точке.
2. Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, пересекает окружность в двух точках.
3. Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.
4. Сформулируйте и докажите теорему, обратную утверждению задачи 3.
5. Из точки данной окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.
6. Из точки данной окружности проведены две хорды, равные радиусу. Найдите угол между ними.
7. Может ли окружность касаться прямой в двух точках? Объясните ответ.
8. Докажите, что касательная к окружности не имеет других общих точек с окружностью, кроме точки касания.
9. Какие углы образует хорда AB, равная радиусу окружности, с касательной в точке A?
10. Найдите углы, под которыми пересекаются прямые, касающиеся окружности в концах хорды, равной радиусу.
11. Окружности с радиусами 30 см и 40 см касаются. Найдите расстояние между центрами окружностей в случаях внешнего и внутреннего касаний.
12. Могут ли касаться окружности, если их радиусы равны 25 см и 50 см, а расстояние между центрами 60 см?
13. 1) Точки A, B, C лежат на прямой, а точка O — вне прямой. Могут ли два треугольника AOB и BOC быть равнобедренными с основаниями AB и BC? Обоснуйте ответ.

    2) Могут ли окружность и прямая пересекаться более чем в двух точках?
14. 1) Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB перпендикулярна прямой OO_1.

    2) Докажите, что две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.
15. 1) Через точку A окружности с центром O проведена прямая, не касающаяся окружности. OB — перпендикуляр, опущенный на прямую. На продолжении отрезка AB отложен отрезок $BC = AB$. Докажите, что точка C лежит на окружности.

    2) Докажите, что если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то она является касательной к окружности в этой точке.

    3) Докажите, что если две окружности имеют только одну общую точку, то они касаются в этой точке.

16. 1) Из одной точки проведены две касательные к окружности (рис. 84). Докажите, что отрезки касательных MP и MQ равны.
2) Докажите, что через одну точку не может проходить больше двух касательных к окружности.

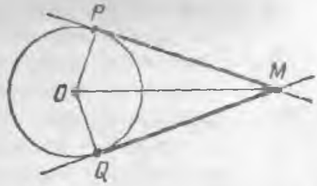


Рис. 84

17. Постройте треугольник с данными сторонами a, b и c, если: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см; 3) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см.
18. Дан треугольник ABC. Постройте другой равный ему треугольник ABD.
19. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.
20. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.
21. Постройте треугольник ABC по следующим данным:
1) по двум сторонам и углу между ними:
а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40°$;
б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70°$;
2) по стороне и прилежащим к ней углам:
а) $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$;
б) $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$.
22. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему большей из них:
1) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 70°$;
2) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $\beta = 100°$.
23. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании.
24. Разделите угол на четыре равные части.
25. Постройте углы 60° и 30°.
26. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.
27. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
28. Дан треугольник. Постройте его медианы и высоты.
29. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.
30. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.
31. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.
32. Постройте треугольник по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.
33. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.

34. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, опущенной на основание.

35. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

36. Докажите, что геометрическое место точек, удаленных от данной прямой на расстояние h, состоит из двух прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на h.

37. На данной прямой найдите точку, которая находится на данном расстоянии от другой данной прямой.

38. Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

39. На данной прямой найдите точку, равноудаленную от двух данных точек.

40. Даны четыре точки: A, B, C, D. Найдите точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и одинаково удалена от точек C и D.

41. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

42. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон.

43. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.

44. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

45. Постройте окружность, которая касается сторон данного угла, причем одной из них — в данной точке.

46. Сторона треугольника равна 10 см, а противолежащий ей угол — $150°$. Найдите радиус описанной окружности.

47. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен $30°$, а диаметр окружности 10 см?

48. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности? (Два случая.)

49. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

50. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.

51. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

52. На окружности отмечены четыре точки: A, B, C, D. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен α? (Два случая.)

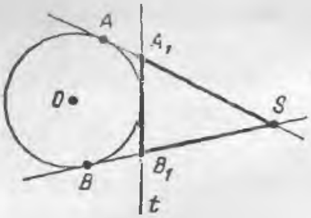


Рис. 85

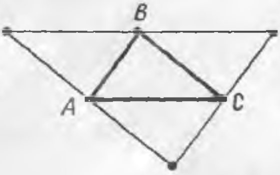


Рис. 86

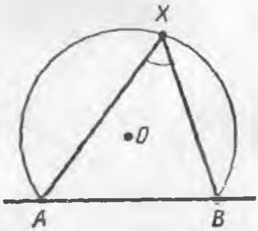


Рис. 87

53. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен $10°$, угол ACD равен $20°$. Найдите угол CAD.

54. 1) Проведите через данную точку прямую, касающуюся данной окружности.

2) Как построить касательную к двум окружностям?

55. 1) Через точку S проведены касательные SA и SB к окружности (рис. 85). Касательная t пересекает отрезки SA и SB в точках A_1 и B_1. Докажите, что периметр треугольника SA_1B_1 не зависит от того, какая взята касательная t, и равен $SA + SB$.

2) Даны угол и точка. Как провести через эту точку прямую, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с данным периметром?

56. 1) Докажите, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются (не параллельны).

2) Докажите, что серединные перпендикуляры к трем сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

3) Докажите, что около любого треугольника можно описать окружность, и только одну.

57. 1) Через вершины треугольника ABC проведены прямые, параллельные противолежащим сторонам (рис. 86). Точки их пересечения являются вершинами нового треугольника. Докажите, что вершины данного треугольника являются серединами его сторон.

2) Докажите, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

58. 1) Докажите, что две биссектрисы треугольника пересекаются.

2) Докажите, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3) Докажите, что в любой треугольник можно вписать окружность, и только одну.

59. Докажите, что геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, есть часть окружности с концами в этих точках (рис. 87).

7 класс

§ 6. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ВЫПУКЛЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются *вершинами* четырехугольника, а соединяющие их отрезки — *сторонами* четырехугольника. На рисунке 88 представлены три фигуры, каждая из которых состоит из четырех точек A, B, C, D и четырех последовательно соединяющих их отрезков AB, BC, CD и AD. Четырехугольником является только третья фигура: у первой фигуры точки A, B, C лежат на одной прямой, а у второй отрезки BC и AD пересекаются.

Вершины четырехугольника называются *соседними*, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются *диагоналями*. У четырехугольника на рисунке 89 диагоналями являются отрезки AC и BD.

Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются *соседними сторонами*. Стороны, не имеющие

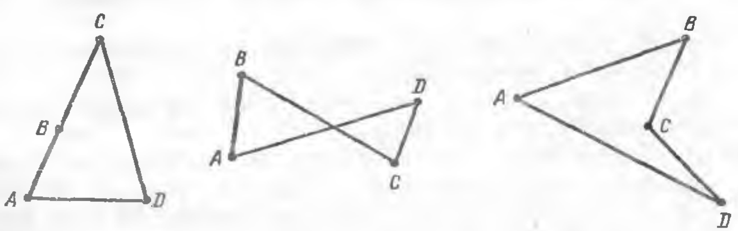


Рис. 88

общего конца, называются *противолежащими сторонами*. У четырехугольника на рисунке 89 противолежащими являются стороны AB и CD, BC и AD.

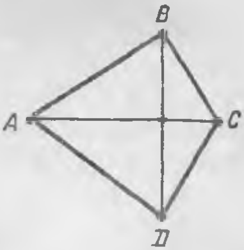


Рис. 89

Четырехугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости. На рисунке 90, *а* четырехугольник выпуклый, а на рисунке 90, *б* — не выпуклый.

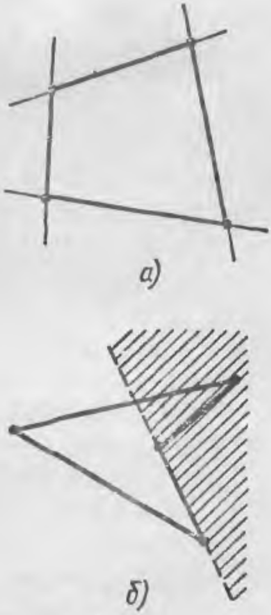


Рис. 90

Четырехугольник обозначается указанием его вершин. Например, четырехугольник на рисунке 89 обозначается так: $ABCD$. В обозначении четырехугольника рядом стоящие вершины должны быть соседними. Четырехугольник $ABCD$ на рисунке 89 можно также обозначить $BCDA$ или $CDAB$. Но нельзя обозначить $ABDC$ (B и D — не соседние вершины).

Далее мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники. *Углом* выпуклого четырехугольника $ABCD$ при вершине A называется угол, образованный полупрямыми AB и AD.

З а д а ч а (1). Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются, то он выпуклый.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, у которого диагонали пересекаются (рис. 91). Возьмем любую сторону четырехугольника, например AB. Прямая AB разбивает плоскость на две полуплоскости. Точка S — точка пересечения диагоналей — лежит в одной из них. В той же

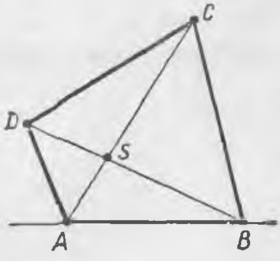


Рис. 91

полуплоскости лежат и вершины C и D. Поэтому стороны BC, CD и DA лежат в той полуплоскости, где лежит точка S, т. е. по одну сторону от прямой AB. То же самое можно повторить для любой из трех остальных сторон четырехугольника. Значит, четырехугольник $ABCD$ выпуклый.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых (рис. 92).

Теорема 6.1. ***Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник и O — точка пересечения его диагоналей (рис. 93). Треугольники AOD и COB равны. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OB = OD$ и $OA = OC$ по условию теоремы. Значит, углы OBC и ODA равны. А они являются внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей BD. По теореме 4.2 прямые AD и BC параллельны. Параллельность прямых AB и CD доказывается с помощью равенства треугольников AOB и COD. Теорема доказана.

Теорема 6.2 (обратная теореме 6.1). ***Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 94). Проведем его диагональ BD. Отметим на ней середину O и на продолжении отрезка AO отложим отрезок OC_1, равный AO. По теореме 6.1 четырехугольник ABC_1D есть параллелограмм. Следовательно, прямая BC_1 параллельна AD. Но через точку B можно провести только одну прямую, параллельную AD. Значит, прямая BC_1 совпадает

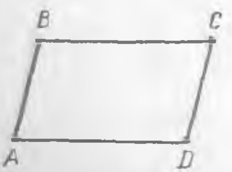


Рис. 92

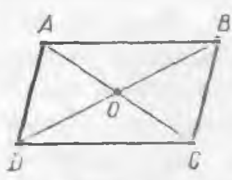


Рис. 93

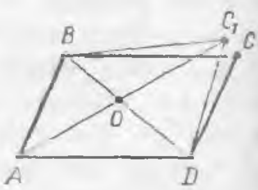


Рис. 94

с прямой BC. Так же доказывается, что прямая DC_1 совпадает с прямой DC. Значит, точка C_1 совпадает с C. Параллелограмм $ABCD$ совпадает с ABC_1D. Поэтому его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

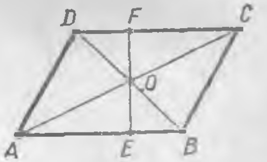


Рис. 95

З а д а ч а (6). Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что отрезок ее, заключенный между параллельными сторонами, делится в этой точке пополам.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм и EF — прямая, пересекающая параллельные стороны AB и CD (рис. 95). Треугольники OAE и OCF равны по второму признаку. У них стороны OA и OC равны, так как O — середина диагонали AC (теорема 6.2). Углы при вершине O равны как вертикальные, а углы EAO и FCO равны как внутренние накрест лежащие при параллельных AB, CD и секущей AC. Из равенства треугольников следует равенство сторон $OE = OF$. Что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 6.3. *У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 96). Проведем диагонали параллелограмма. Пусть O — точка их пересечения. Равенство противолежащих сторон AB и CD следует из равенства треугольников AOB и COD. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OA = OC$ и $OB = OD$ по теореме 6.2. Точно так же из равенства треугольников AOD и COB следует равенство другой пары противолежащих сторон — AD и BC.

Равенство противолежащих углов ABC и CDA следует из равенства треугольников ABC и CDA (по трем сторонам). У них $AB = CD$ и $BC = DA$ по доказанному, а сторона AC общая. Точно так же равенство противолежащих углов BCD и DAB следует из равенства треугольников BCD и DAB. Теорема доказана полностью.

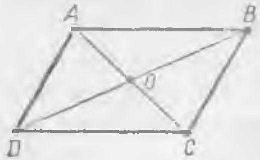


Рис. 96

З а д а ч а (15). Докажите, что если у выпуклого четырехугольника две

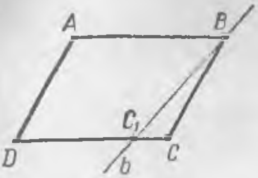


Рис. 97

стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, у которого стороны AB и CD параллельны и равны (рис. 97). Проведем через вершину B прямую b, параллельную стороне AD. Эта прямая пересекает прямую DC в некоторой точке C_1. Точка C_1 принадлежит лучу DC, так как дополнительный луч и прямая b лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AD. Четырехугольник ABC_1D есть параллелограмм. По теореме 6.3 $C_1D = AB$. А по условию $AB=CD$. Значит, $DC = DC_1$. Отсюда следует, что точки C и C_1 совпадают. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ совпадает с параллелограммом ABC_1D, а значит, является параллелограммом.

ПРЯМОУГОЛЬНИК. РОМБ. КВАДРАТ

Прямоугольник — это четырехугольник, у которого все углы прямые (рис. 98).

Теорема 6.4. ***Прямоугольник есть параллелограмм. Диагонали прямоугольника равны.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник (см. рис. 98). Прямые AD и BC, будучи перпендикулярными прямой AB, параллельны. Прямые AB и CD перпендикулярны AD и поэтому тоже параллельны. Следовательно, прямоугольник — параллелограмм.

Второе утверждение теоремы следует из равенства прямоугольных треугольников BAD и CDA. У них углы BAD и CDA прямые, катет AD общий, а катеты AB и CD равны как противолежащие стороны параллелограмма. Из равенства треугольников следует, что их гипотенузы равны. А гипотенузы есть диагонали прямоугольника. Теорема доказана.

Задача (21). Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником.

Решение. Углы параллелограмма, прилежащие к одной стороне, являются внутренними односторонними, поэтому их сумма равна 180°. Так как по условию задачи эти углы равны, то каждый из них прямой. А параллелограмм, у которого все углы прямые, есть прямоугольник.

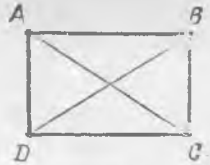


Рис. 98

Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 99).

Теорема 6.5. ***Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.***

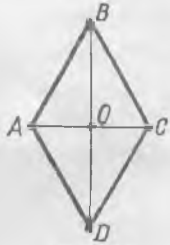


Рис. 99

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный ромб (см. рис. 99), O — точка пересечения его диагоналей. По свойству параллелограмма $AO = OC$. Значит, в равнобедренном треугольнике ABC отрезок BO является медианой. По свойству равнобедренного треугольника медиана, проведенная к его основанию, является биссектрисой и высотой. А это значит, что диагональ BD является биссектрисой угла B и перпендикулярна диагонали AC. Теорема доказана.

Задача (28). Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

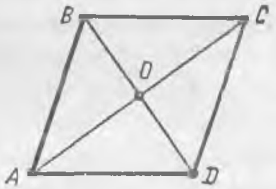


Рис. 100

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм с перпендикулярными диагоналями и O — точка пересечения диагоналей (рис. 100). Треугольники AOB и AOD равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O по условию прямые, сторона AO общая, а $OB = OD$ по свойству параллелограмма (теорема 6.2). Из равенства треугольников следует равенство сторон: $AB = AD$. А по теореме 6.3 $AD = BC$, $AB = CD$. Итак, все стороны параллелограмма равны, а значит, он есть ромб.

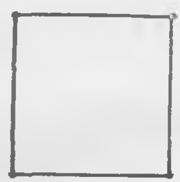


Рис. 101

Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 101).

Квадрат является также ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба.

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Теорема 6.6 (теорема Фалеса)[1]. *Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне* (рис. 102).

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла и A_2 лежит между A_1 и A_3 (рис. 102). Пусть B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Докажем, что если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

Сначала докажем, что точка B_2 лежит между B_1 и B_3. Точки A_1 и A_3 лежат по разные стороны от прямой A_2B_2, так как отрезок A_1A_3 пересекает эту прямую (в точке A_2). Точки A_1 и B_1 лежат по одну сторону от прямой A_2B_2, так как отрезок A_1B_1 параллелен прямой A_2B_2, а значит, не пересекает ее. Точно так же точки A_3 и B_3 лежат по одну сторону от прямой A_2B_2. Значит, точки B_1 и B_3 лежат по разные стороны от этой прямой, и поэтому отрезок B_1B_3 пересекает прямую A_2B_2 (в точке B_2).

Проведем через точку B_2 прямую EF, параллельную прямой A_1A_3. По свойству параллелограмма $A_1A_2 = FB_2$, $A_2A_3 = B_2E$. И так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то $FB_2 = B_2E$.

Треугольники B_2B_1F и B_2B_3E равны по второму признаку. У них $B_2F = B_2E$ по доказанному. Углы при вершине B_2 равны как вертикальные, а углы B_2FB_1 и B_2EB_3 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных A_1B_1 и A_3B_3 и секущей EF. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана.

Задача 6.7. ***Разделить данный отрезок AB на n равных частей.***

Решение. Проведем из точки A полупрямую a, не лежащую на прямой AB (рис. 103). Отложим на полупрямой a равные отрезки: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1} A_n. Проведем через точки A_n и B прямую b. Прямые, параллельные b, проходящие через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1}, пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые делят отрезок AB на n равных отрезков (теорема 6.6).

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

[1] Фалес Милетский — древнегреческий ученый, живший в VI в. до н. э.

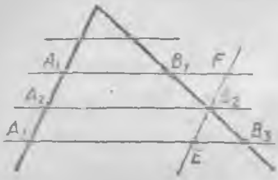


Рис. 102

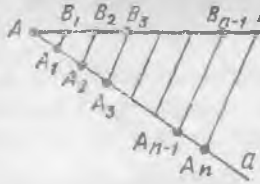


Рис. 103

Т е о р е м а 6.8. *Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть DE — средняя линия треугольника ABC (рис. 104). Проведем через точку D прямую, параллельную AB. По теореме 6.6 она пересекает отрезок AC в его середине, т. е. содержит среднюю линию DE. Первое утверждение доказано.

Проведем теперь среднюю линию DF. Она параллельна стороне AC. Четырехугольник $AEDF$ — параллелограмм. По свойству параллелограмма $ED = AF$, а так как $AF = FB$, то $ED = \frac{1}{2} AB$. Теорема доказана.

З а д а ч а (47). Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Р е ш е н и е. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник и E, F, G, H — середины его сторон (рис. 105), EF — средняя линия треугольника ABC. Поэтому $EF \parallel AC$. GH — средняя линия треугольника ADC. Поэтому $GH \parallel AC$. Итак, $EF \parallel GH$, т. е. противолежащие стороны EF и GH четырехугольника $EFGH$ параллельны. Точно так же доказывается параллельность другой пары противолежащих сторон. Значит, четырехугольник $EFGH$ — параллелограмм.

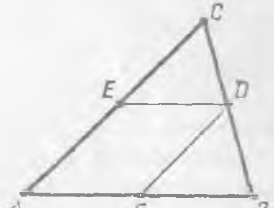


Рис. 104

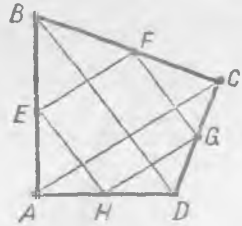


Рис. 105

ТРАПЕЦИЯ

Трапецией называется выпуклый четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны (рис. 106). Эти параллельные стороны называются *основаниями* трапеции. Две другие стороны называются *боковыми сторонами*. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой*. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией трапеции*.

Теорема 6.9. ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.***

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 107). Проведем через вершину B и середину P боковой стороны CD прямую. Она пересекает прямую AD в некоторой точке E. Треугольники PBC и PED равны по второму признаку равенства треугольников. У них $CP = DP$ по построению, углы при вершине P равны как вертикальные, а углы PCB и PDE равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD. Из равенства треугольников следует равенство сторон $PB = PE$, $BC = ED$. Значит, средняя линия PQ трапеции является средней линией треугольника ABE. По свойству средней линии треугольника $PQ \parallel AE$ и отрезок $PQ = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Теорема доказана.

Задача (60). Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности оснований.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с бо́льшим основанием CD (рис. 108). Проведем через середину G боковой стороны BC прямую, параллельную основаниям.

Рис. 106

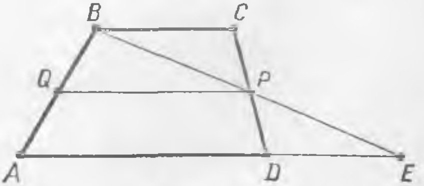


Рис. 107

Она пересечет диагонали в точках E и F, которые являются их серединами. EG — средняя линия треугольника DBC, FG — средняя линия треугольника ABC. Отрезок EF равен разности этих средних линий:

$$EF = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

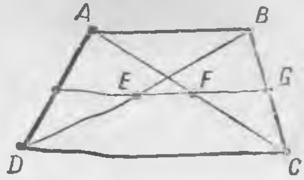


Рис. 108

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какая фигура называется четырехугольником?
2. Какая из трех фигур на рисунке 88 является четырехугольником? Почему две другие фигуры не являются четырехугольниками?
3. Какие вершины четырехугольника называются соседними, какие — противолежащими?
4. Что такое диагонали четырехугольника?
5. Какие стороны четырехугольника называются соседними? Какие называются противолежащими?
6. Как обозначается четырехугольник?
7. Какой четырехугольник называется выпуклым?
8. Что такое угол выпуклого четырехугольника при данной вершине?
9. Что такое параллелограмм?
10. Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то он является параллелограммом.
11. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
12. Докажите, что у параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.
13. Что такое прямоугольник?
14. Докажите, что прямоугольник является параллелограммом; диагонали прямоугольника равны.
15. Что такое ромб?
16. Докажите, что диагонали ромба пересекаются под прямым углом; диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
17. Что такое квадрат? Перечислите свойства квадрата.
18. Докажите теорему Фалеса.
19. Докажите, что средняя линия треугольника равна половине соответствующей стороны.
20. Какой четырехугольник называется трапецией?
21. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются, то он выпуклый.
2. Медианы треугольника ABC, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке M. Докажите, что четырехугольник $ABCM$ невыпуклый.
3. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трех заданных точках, не лежащих на одной прямой?
4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр (сумму длин всех сторон) получившегося параллелограмма.
5. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм с периметром 10 см. Найдите длину диагонали BD, зная, что периметр треугольника ABD равен 8 см.
6. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что отрезок ее, заключенный между параллельными сторонами, делится в этой точке пополам.
7. В параллелограмме $ABCD$ через точку пересечения диагоналей проведена прямая, которая отсекает на сторонах BC и AD отрезки $BE = 2$ м и $AF = 2{,}8$ м. Найдите стороны BC и AD.
8. Один из углов параллелограмма равен 40°. Найдите остальные углы.
9. Найдите углы параллелограмма, зная, что один из них больше другого на 50°.
10. Может ли один угол параллелограмма быть равным 40°, а другой — 50°?
11. Диагональ параллелограмма образует с двумя его сторонами углы 25° и 35°. Найдите углы параллелограмма.
12. Найдите все углы параллелограмма, если сумма двух из них равна: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.
13. Найдите все углы параллелограмма, если разность двух из них равна: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140°.
14. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны BC, а F — середина стороны AD. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ — параллелограмм.
15. Докажите, что если у выпуклого четырехугольника две стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом.
16. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке E. Чему равны отрезки BE и EC, если $AB = 9$ см, $AD = 15$ см?

17. Две стороны параллелограмма относятся как 3 : 4, а периметр его равен 2,8 м. Найдите стороны.
18. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр, опущенный из вершины B на сторону AD, делит ее пополам. Найдите диагональ BD и стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма равен 3,8 м, а периметр треугольника ABD равен 3 м.
19. Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и диагонали; 2) по стороне и двум диагоналям.
20. Постройте параллелограмм: 1) по двум сторонам и углу; 2) по диагоналям и углу между ними.
21. Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником.
22. Докажите, что если у параллелограмма диагонали равны, то он является прямоугольником.
23. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10 см.
24. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 56 см. Найдите стороны прямоугольника.
25. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и 10 см. Найдите их длины.
26. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 см, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найдите периметр прямоугольника.
27. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5 : 2, а гипотенуза треугольника равна 45 см?
28. Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.
29. Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его углов, то он является ромбом.
30. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 4 : 5. Найдите углы ромба.
31. Докажите, что четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.
32. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите углы ромба.
33. Постройте ромб: 1) по углу и диагонали, исходящей из вершины этого угла; 2) по диагонали и противолежащему углу.

34. Постройте ромб: 1) по стороне и диагонали; 2) по двум диагоналям.
35. В равнобедренный прямоугольный треугольник, каждый катет которого 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите периметр квадрата.
36. Дан квадрат $ABCD$. На каждой из его сторон отложены равные отрезки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ есть квадрат.
37. Диагональ квадрата равна 4 м. Сторона его равна диагонали другого квадрата. Найдите сторону последнего.
38. Дан квадрат, сторона которого 1 м, диагональ его равна стороне другого квадрата. Найдите диагональ последнего.
39. В квадрат вписан прямоугольник так, что на каждой его стороне находится одна вершина прямоугольника и стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата. Найдите стороны прямоугольника, зная, что одна из них вдвое больше другой и что диагональ квадрата равна 12 м.
40. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а другие две — на катетах. Найдите сторону квадрата, если известно, что гипотенуза равна 3 м.
41. Из внешней точки проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные; радиус окружности 10 см. Найдите длины касательных (расстояние от данной точки до точки касания).
42. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см, 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
43. Периметр треугольника равен 12 см; середины сторон соединены отрезками. Найдите периметр полученного треугольника.
44. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.
45. Как построить треугольник, если заданы середины его сторон?
46. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, проходящей через середины двух его сторон.
47. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
48. Найдите стороны параллелограмма из предыдущей задачи, если известно, что диагонали четырехугольника равны 10 м и 12 м.
49. У четырехугольника диагонали равны a и b. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.

50. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.
51. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.
52. Боковая сторона трапеции разделена на три равные части, и из точек деления проведены к другой стороне отрезки, параллельные основаниям. Чему равны длины этих отрезков, если основания трапеции равны 2 м и 5 м?
53. Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.
54. Чему равны углы равнобокой трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40°?
55. В равнобокой трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание.
56. В равнобокой трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 6 см и 30 см. Найдите основания трапеции.
57. Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.
58. По одну сторону от данной прямой даны две точки A и B на расстояниях 10 м и 20 м от нее. Найдите расстояние от середины отрезка AB до данной прямой.
59. По разные стороны от данной прямой даны две точки A и B на расстояниях 10 см и 4 см от нее. Найдите расстояние от середины отрезка AB до данной прямой.
60. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности оснований.
61. Основания трапеции относятся как 2 : 3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания.
62. Концы диаметра удалены от касательной к окружности на 1,6 м и 0,6 м. Найдите длину диаметра.
63. Средняя линия трапеции равна 7 см, а одно из ее оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.
64. Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобокой трапеции, делит большее основание на части, имеющие длины a и b ($a > b$). Найдите среднюю линию трапеции.
65. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.
66. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.
67. 1) В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке M (рис. 109). В треугольнике AMB проведена средняя линия PQ. Дока-

жите, что четырехугольник A_1B_1PQ — параллелограмм.

2) Докажите, что любые две медианы треугольника пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

3) Докажите, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

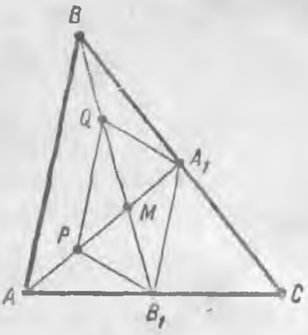


Рис. 109

68. Докажите, что у выпуклого четырехугольника диагонали пересекаются.

69. Докажите, что у выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противолежащих углов равна 180°.

70. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы длин противолежащих сторон одинаковы.

§ 7. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

КОСИНУС УГЛА

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Косинус угла α обозначается так: $\cos\alpha$. Оказывается, что косинус угла зависит только от градусной меры угла, но не зависит от размеров треугольника и его расположения, т. е. у двух треугольников с одним и тем же острым углом косинусы этого угла равны.

Теорема 7.1. ***Косинус угла зависит только от градусной меры угла.***

Доказательство. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два прямоугольных треугольника с одним и тем же углом при

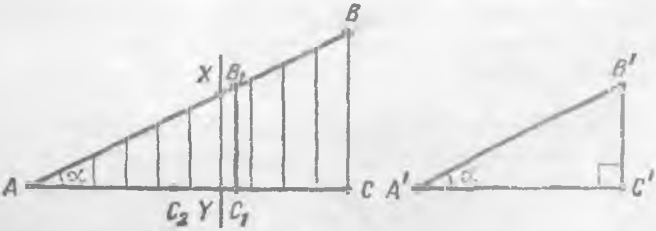


Рис. 110

вершинах A и A', равным α (рис. 110). Требуется доказать, что

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}. \qquad (*)$$

Отложим на луче AB отрезок AB_1, равный отрезку $A'B'$, и опустим перпендикуляр B_1C_1 на прямую AC. Треугольники AB_1C_1 и $A'B'C'$ равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $A'C' = AC_1$. Следовательно, чтобы доказать равенство (*), достаточно доказать, что

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}.$$

Допустим, что $\frac{AC_1}{AB_1} \neq \frac{AC}{AB}$, например, что $\frac{AC_1}{AB_1} > \frac{AC}{AB}$. Возьмем на отрезке AC_1 точку C_2 так, чтобы $\frac{AC_2}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$. Разобьем отрезок AC на большое число n равных частей и проведем через точки деления прямые, параллельные прямой BC. По теореме Фалеса эти прямые разбивают отрезок AB на n равных отрезков. При достаточно большом n на отрезке C_1C_2 будут точки деления. Обозначим одну из них через Y, а соответствующую точку на стороне AB — через X.

Пусть $a = \frac{AC}{n}$, $b = \frac{AB}{n}$ и пусть m — число малых отрезков разбиения, которые лежат на отрезке AY. Имеем: $AC = na$, $AB = nb$, $AY = ma$, $AX = mb$. Мы видим, что

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AY}{AX}.$$

Заменим в правой части равенства величину AY меньшей величиной AC_2, а величину AX — большей AB_1. Тогда правая часть уменьшится, и мы получим: $\frac{AC}{AB} > \frac{AC_2}{AB_1}$. А по выбору точки C_2 должно быть $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_2}{AB_1}$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

З а д а ч а (1). Постройте угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$.

Р е ш е н и е. Строим прямоугольный треугольник с катетом 3 единицы длины и гипотенузой 5 единиц. У этого треугольника угол, противолежащий второму катету, будет искомым.

Теорема 7.2 (теорема Пифагора[1]). *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Доказательство. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведем высоту CD из вершины прямого угла C (рис. 111).

По определению косинуса угла

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}. \text{ Отсюда } AB \cdot AD = AC^2.$$

Аналогично

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}. \text{ Отсюда } AB \cdot BD = BC^2.$$

Складывая полученные равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + DB) = AB^2.$$

Теорема доказана.

Из теоремы Пифагора следует, что *в прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.* Отсюда, в свою очередь, следует, что $\cos \alpha < 1$ *для любого острого угла* α.

Задача (16). Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

Решение. Находим высоту CD (рис. 112), опущенную на основание. По теореме Пифагора

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

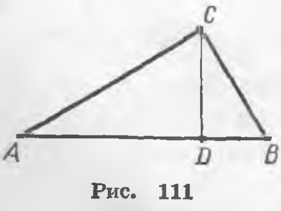


Рис. 111

Обозначим радиус описанной окружности через R. Если центр O окружности лежит на высоте CD (рис. 112, *а*), то $OD = CD - R$. Если центр окружности лежит на продолжении высоты

[1] Пифагор — древнегреческий ученый, живший в VI в. до н. э.

(рис. 112, *б*), то $OD = R - CD$. По теореме Пифагора $AO^2 = OD^2 + AD^2$, или

$$R^2 = \left(\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - R\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Отсюда находим:

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

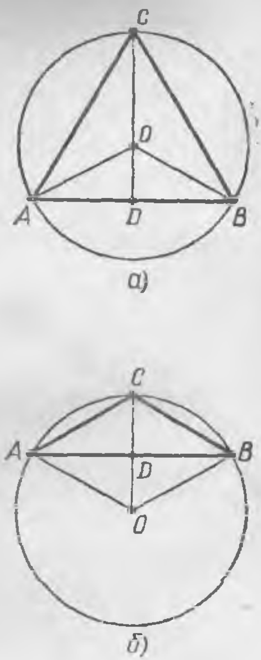


Рис. 112

Пусть BA — перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, и C—любая точка прямой a, отличная от A. Отрезок BC называется *наклонной*, проведенной из точки B к прямой a (рис. 113). Точка C называется *основанием наклонной*. Отрезок AC называется *проекцией наклонной*.

Из теоремы Пифагора следует, что если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то ***наклонная больше перпендикуляра, равные наклонные имеют равные проекции, из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.***

З а д а ч а (21). Стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

Р е ш е н и е. Обозначим проекцию стороны a на прямую, содержащую сторону c, через x. Тогда проекция стороны b на эту прямую будет либо $c - x$ (рис. 114, *а*), либо $c + x$ (рис. 114, *б*). По теореме Пифагора в первом случае

$$CD^2 = a^2 - x^2,\ CD^2 = b^2 - (c - x)^2$$

Рис. 113

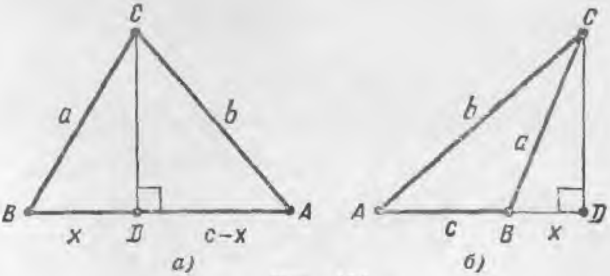


Рис. 114

Отсюда получаем уравнение:

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2.$$

Решаем его:

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2,\quad a^2 = b^2 - c^2 + 2cx,$$

$$x = \frac{1}{2c}(a^2 - b^2 + c^2).$$

Находим высоту CD:

$$CD = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4c^2}(a^2 - b^2 + c^2)^2}.$$

Во втором случае ответ получается такой же. Проведите вычисления самостоятельно.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом при вершине A, равным α (рис. 115). Согласно определению $\cos\alpha$ *равен отношению катета, прилежащего к углу* α, *к гипотенузе*.

Синусом угла α (обозначается $\sin\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к гипотенузе AB:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Тангенсом угла α (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему катету AC:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Синус и тангенс угла, так же как и косинус, зависят только от величины угла.

Действительно, по теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2},$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Рис. 115

Так как $\cos\alpha$ зависит только от величины угла, то и $\sin\alpha$ зависит только от величины угла. Далее,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Отсюда видно, что и $\operatorname{tg} \alpha$ зависит только от величины угла.

Из определения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ получаем следующие правила:

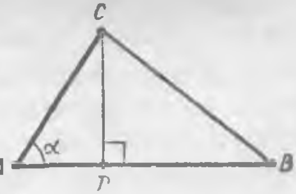


Рис. 116

Катет, противолежащий углу α равен произведению гипотенузы на $\sin \alpha$.

Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos \alpha$.

Катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на $\operatorname{tg} \alpha$.

Эти правила позволяют, зная одну из сторон прямоугольного треугольника и острый угол, находить две другие стороны; зная две стороны, находить острые углы.

З а д а ч а (31). В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и острый угол α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, опущенную на гипотенузу.

Р е ш е н и е (рис. 116). $AC = AB \cos \alpha = c \cos \alpha$; $BC = AB \sin \alpha = c \sin \alpha$; $BD = BC \sin \alpha = c \sin^2 \alpha$; $AD = AC \cos \alpha = c \cos^2 \alpha$; $CD = AC \sin \alpha = c \sin \alpha \cos \alpha$.

Из этих выражений получаются следующие соотношения: $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$, $BC = \sqrt{AB \cdot BD}$, $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$. Эти соотношения полезно помнить. Их выражают словами так:

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

Название «среднее пропорциональное» оправдывается тем, что число $x = \sqrt{ab}$ является средним членом пропорции $a : x = x : b$.

КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ТАБЛИЦАМИ СИНУСОВ, КОСИНУСОВ И ТАНГЕНСОВ

Для $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ составлены специальные таблицы. Эти таблицы позволяют по данному углу α найти $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ или по значениям $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ найти соответствующий угол. Поясним, как пользоваться этими таблицами на примере решения задачи 32.

З а д а ч а (32). 1) Пользуясь таблицами, найдите: $\sin 22°$, $\sin 22°36'$, $\sin 22°38'$, $\sin 22°41'$; $\cos 68°$, $\cos 68°18'$, $\cos 68°20'$, $\cos 68°23'$.

2) Найдите угол x, если $\sin x = 0{,}2840$; $\sin x = 0{,}2844$; $\cos x = 0{,}2710$.

Р е ш е н и е (см. таблицы В. М. Брадиса, с. 52). 1) Найдем $\sin 22°$. В первой колонке таблицы ищем $22°$. Рядом во второй колонке видим число 0,3746. Это и есть $\sin 22°$.

Найдем $\sin 22°36'$. Снова ищем $22°$ в первой колонке. Затем, передвигаясь по строке, в которой стоит $22°$, ищем колонку, у которой вверху стоит $36'$. В этой колонке и будет $\sin 22°36'$. Он равен 0,3843.

Найдем $\sin 22°38'$. Ищем ближайшее к 38 число, кратное 6. Это будет 36. Находим $\sin 22°36'$ и прибавляем к нему поправку на $2'$. Поправки на $1'$, $2'$ и $3'$ даны в трех последних колонках таблицы. В строке, где $22°$, находим поправку на $2'$. Она равна 5. Теперь находим $\sin 22°38' = 0{,}3843 + 0{,}0005 = 0{,}3848$.

Найдем $\sin 22°41'$. Ищем $\sin 22°42'$ и поправку на $1'$ вычитаем. Находим $\sin 22°41' = 0{,}3856$.

Значения косинуса можно получить с помощью таблицы синусов, пользуясь равенством $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$ (оно будет доказано в теореме 7.3). Но можно найти косинус и непосредственно. Найдем $\cos 68°$. Ищем в четвертой колонке с правой стороны таблицы $68°$. Рядом слева от него стоит число 0,3746. Это и есть $\cos 68°$. Заметим, что $\cos 68° = \cos (90° - 22°) = \sin 22°$. А $\sin 22°$ также равен 0,3746.

Найдем $\cos 68°18'$. Ищем строку, где $68°$. Перемещаемся по этой строке влево. В колонке, где внизу стоит $18'$, находим $\cos 68°18'$. Он равен 0,3697.

Чтобы найти $\cos 68°20'$, берем $\cos 68°18'$ и учитываем поправку на $2'$. Поправку надо вычитать. Получаем $\cos 68°20' = 0{,}3697 - 0{,}0005 = 0{,}3692$.

Чтобы найти $\cos 68°23'$, берем $\cos 68°24'$ и учитываем поправку на $1'$. Ее надо прибавлять. Получаем $\cos 68°23' = 0{,}3681 + 0{,}0003 = 0{,}3684$.

При работе с поправками надо иметь в виду, что синус при увеличении угла увеличивается, а косинус уменьшается (см. теорему 7.4). Поэтому нетрудно сообразить, прибавлять поправку или вычитать.

Значения тангенса по таблице тангенсов находятся так же, как значения синусов по таблице синусов.

2) Найдем теперь угол x, для которого $\sin x = 0{,}2840$. Ищем в таблице синусов число 0,2840. Мы видим, что это число стоит в строке, где слева стоит 16°, и в колонке, где сверху стоит $30'$. Значит, $x = 16^\circ 30'$.

Найдем x, для которого $\sin x = 0{,}2844$. Ищем в таблице синусов число 0,2844 или ближайшее к нему. Ближайшим числом будет 0,2840. Это $\sin 16^\circ 30'$. Если прибавить поправку на $1'$, то получим 0,2843. Если прибавить поправку на $2'$, то получим 0,2846. Поэтому с точностью до $1'$ надо считать $x = 16^\circ 31'$.

Найдем x, для которого $\cos x = 0{,}2710$. Ищем в таблице число 0,2710 или ближайшее к нему. Это число будет 0,2706. Оно есть $\cos 74^\circ 18'$. Наше число больше. Значит, угол меньше. Поправка на $1'$ будет 0,0003, а на $2'$ будет 0,0006. Берем поправку на $1'$. Получаем с точностью до $1'$ угол $x = 74^\circ 17'$.

Угол по значению тангенса ищется с помощью таблицы тангенсов так же, как угол по значению синуса с помощью таблицы синусов.

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Докажем следующие тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \qquad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Возьмем любой прямоугольный треугольник ABC с углом при вершине A, равным α (рис. 117). По теореме Пифагора

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

Разделим обе части равенства на AB^2. Получим:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1.$$

Но $\frac{BC}{AB} = \sin \alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos \alpha$. Таким образом,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

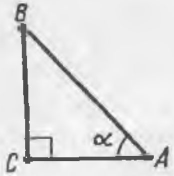


Рис. 117

Это равенство есть тождество. Оно верно при любом α ($\alpha < 90^\circ$).

Чтобы получить второе тождество, разделим обе части полученного тождества на $\cos^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Если обе части тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ разделить на $\sin^2\alpha$, то получим третье тождество:

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значение этих тождеств заключается в том, что они позволяют, зная одну из величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$, найти две другие.

З а д а ч а (47). Вычислите значения $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

Р е ш е н и е. Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}. \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}.$$

ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

Т е о р е м а 7.3. *Для любого острого угла* α $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с острым углом α при вершине A (рис. 118). Тогда острый угол при вершине B равен $90^\circ - \alpha$. Согласно определению

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB},$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB}, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AB}.$$

Из второго и третьего равенств получаем: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$. Из первого и четвертого равенств получаем: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Теорема доказана.

Найдем синус, косинус и тангенс угла 45°. Для этого построим прямоугольный треугольник с острым углом 45° (рис. 119). Второй его острый угол тоже 45°, поэтому треугольник равнобедренный. Пусть катеты треугольника рав-

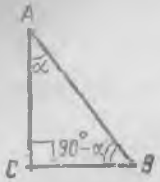


Рис. 118

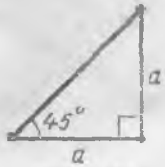


Рис. 119

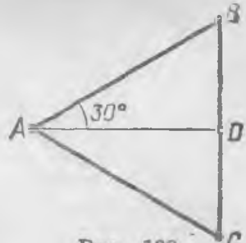


Рис. 120

ны a. По теореме Пифагора гипотенуза будет $a\sqrt{2}$. Находим:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Найдем синус, косинус и тангенс угла 30°. Возьмем равносторонний треугольник ABC (рис. 120). Проведем в нем медиану AD. Она будет биссектрисой и высотой. Поэтому треугольник ABD — прямоугольный с острым углом при вершине A в 30°. Пусть a — сторона равностороннего треугольника. Тогда $BD = \frac{a}{2}$. По теореме Пифагора

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

По теореме 7.3

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

ИЗМЕНЕНИЕ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ И $\operatorname{tg}\alpha$ ПРИ ВОЗРАСТАНИИ УГЛА α

Теорема 7.4. ***При возрастании острого угла*** $\sin\alpha$ ***и*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***возрастают, а*** $\cos\alpha$ ***убывает.***

Доказательство. Пусть α и β — острые углы, причем $\alpha < \beta$. Отложим углы α и β от полупрямой AB в одну полуплоскость (рис. 121). Проведем через точку B прямую, перпендикулярную AB. Она пересекает стороны наших углов в точках C и D. Так как $\alpha < \beta$, то точка C лежит между B и D. Поэтому $BC < BD$. А значит, по свойству нак-

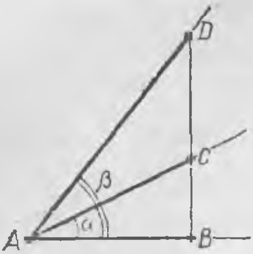


Рис. 121

лонных, проведенных из одной точки к прямой, $AC < AD$. Так как

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC}, \quad \cos\beta = \frac{AB}{AD},$$

то $\cos\alpha > \cos\beta$, т. е. при возрастании угла косинус убывает.

Так как $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, а $\cos\alpha$ убывает при возрастании угла, то $\sin\alpha$ возрастает.

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\sin\alpha$ возрастает, а $\cos\alpha$ убывает при возрастании α, то $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает при возрастании α. Теорема доказана.

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Если точки A и B различны, то *расстоянием* между ними называется длина отрезка AB. Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними принимается равным нулю.

Неравенством треугольника называется свойство расстояний между тремя точками, которое выражается следующей теоремой:

Т е о р е м а 7.5. *Каковы бы ни были три точки, расстояние между любыми двумя из этих точек не больше суммы расстояний от них до третьей точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A, B, C — три данные точки. Если две точки из трех или все три точки совпадают, то утверждение теоремы очевидно. Если все точки различны и лежат на одной прямой, то одна из них лежит между двумя другими, например B. В этом случае $AB + BC = AC$. Отсюда видно, что каждое из трех расстояний не больше суммы двух других.

Допустим теперь, что точки не лежат на одной прямой (рис. 122). Докажем, что $AB < AC + BC$. Опустим перпендикуляр CD на прямую AB. Так как в прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы, то $AD < AC$, $BD < BC$.

По доказанному $AB \leqslant AD + BD$. Следовательно, $AB < AC + BC$. Теорема доказана.

Заметим, что в случае, когда точки не лежат на одной прямой, в неравенстве треугольника — строгое неравенство. Это значит, что *в любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.*

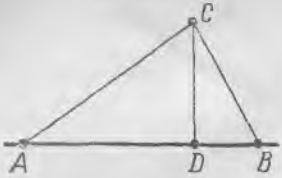


Рис. 122

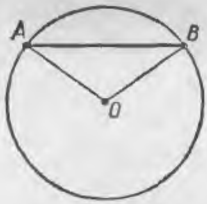


Рис. 123

Задача (70). Докажите, что любая хорда окружности не больше диаметра и равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.

Решение (рис. 123). По неравенству треугольника $AB \leqslant OA + OB = 2R$, причем если центр O не лежит на отрезке AB, то неравенство строгое. Равенство имеет место только в случае, когда хорда проходит через центр, т. е. является диаметром.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Дайте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Докажите, что косинус угла зависит только от градусной меры угла.
3. Докажите теорему Пифагора.
4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.
5. Докажите, что $\cos \alpha < 1$ для острого угла α.
6. Докажите, что если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонные, то наклонная больше перпендикуляра. Равные наклонные имеют равные проекции, из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.
7. Дайте определение синуса и тангенса острого угла. Докажите, что они зависят только от градусной меры угла.
8. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол, через острый угол и другой катет?
9. Объясните, как по таблицам найти значение синуса данного угла. Как по таблицам найти значение косинуса и тангенса данного угла?
10. Объясните, как по таблицам найти угол, если задан его синус, косинус или тангенс.
11. Докажите тождества: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;

$$1 + \mathrm{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

12. Докажите, что для любого острого угла α
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$$
13. Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45°, 60°?
14. Докажите, что $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ возрастают при возрастании острого угла α, а $\cos\alpha$ убывает.
15. Докажите «неравенство треугольника».
16. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте угол, косинус которого равен $\frac{3}{5}$.
2. Постройте угол, косинус которого равен: 1) $\frac{4}{9}$; 2) 0,5; 3) 0,8.
3. Две стороны прямоугольного треугольника равны 3 м и 4 м. Найдите третью сторону. (Два решения.)
4. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны: 1) 6 см и 8 см; 2) 16 дм и 30 дм; 3) 5 м и 12 м.
5. Стороны прямоугольника равны 60 см и 91 см. Чему равна диагональ?
6. Диагональ квадрата равна a. Чему равна сторона квадрата?
7. Можно ли из круглого листа железа диаметром 1,4 м вырезать квадрат со стороной 1 м?
8. Катет прямоугольного треугольника равен 5 м, а его проекция на гипотенузу 3 м. Найдите гипотенузу и второй катет.
9. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если их проекции на гипотенузу равны: 1) 9 см и 16 см; 2) 36 м и 64 м.
10. Даны отрезки a и b. Как построить отрезок:
1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$?
11. Даны отрезки a и b. Как построить отрезок $c = \sqrt{ab}$?
12. Между двумя фабричными зданиями устроен покатый желоб для передачи материалов. Расстояние между зданиями равно 10 м, а концы желоба расположены на высоте 8 м и 4 м над землей. Найдите длину желоба.
13. Стороны прямоугольника равны a и b. Найдите радиус описанной окружности.
14. В окружность вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 8 : 15. Найдите эти стороны, если радиус окружности 34 см.
15. В равнобедренном треугольнике боковая сторона 17 см, а основание 16 см. Найдите высоту, опущенную на основание.

16. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

17. В равностороннем треугольнике со стороной a найдите высоту.

18. В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона 25 см. Найдите высоту трапеции.

19. В равнобокой трапеции боковая сторона равна 41 см, высота 40 см, а средняя линия 45 см. Найдите основания.

20. Боковые стороны треугольника 30 см и 25 см, а высота, опущенная на основание, 24 см. Найдите основание[1].

21. Стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

22. Боковые стороны треугольника 30 см и 25 см. Найдите высоту треугольника, опущенную на основание, равное: 1) 25 см; 2) 11 см.

23. Найдите высоты треугольника, у которого стороны 13 см, 14 см и 15 см.

24. Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, а его боковая сторона на 11 см больше основания. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

25. 1) Из точки B к прямой a проведена наклонная. Докажите, что из точки B к прямой a можно провести еще одну наклонную той же длины.

2) Можно ли провести из данной точки вне прямой три наклонные равной длины? Объясните ответ.

26. У прямоугольного треугольника один катет равен 8 см, а синус противолежащего ему угла равен 0,8. Найдите гипотенузу и второй катет.

27. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b.

28. Найдите радиус r вписанной и радиус R описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

29. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a, а один из острых углов α. Найдите второй острый угол и катеты.

30. В прямоугольном треугольнике катет равен a, а противолежащий ему угол α. Найдите второй острый угол, противолежащий ему катет и гипотенузу.

31. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза c и острый угол α. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, опущенную на гипотенузу.

---

[1] Иногда в произвольном треугольнике, не обязательно равнобедренном, сторона, проведенная горизонтально, называется основанием, а две другие — боковыми сторонами, как в данной задаче.

32. 1) Пользуясь таблицами, найдите: $\sin 22^\circ$, $\sin 22^\circ 36'$, $\sin 22^\circ 38'$, $\sin 22^\circ 41'$; $\cos 68^\circ$, $\cos 68^\circ 18'$, $\cos 68^\circ 20'$, $\cos 68^\circ 23'$.

2) Найдите угол x, если $\sin x = 0{,}2840$; $\sin x = 0{,}2844$; $\cos x = 0{,}2710$.

33. Найдите по таблицам значения синуса и косинуса углов: 1) 16°; 2) $24^\circ 36'$; 3) $70^\circ 32'$; 4) $88^\circ 49'$.

34. Найдите по таблицам величину острого угла x, если: 1) $\sin x = 0{,}0175$; 2) $\sin x = 0{,}5015$; 3) $\cos x = 0{,}6814$; 4) $\cos x = 0{,}0670$.

35. Найдите по таблицам значение тангенса угла: 1) 10°; 2) $40^\circ 40'$; 4) $50^\circ 30'$; 4) $70^\circ 15'$.

36. Найдите по таблицам острый угол x, если: 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x = 0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x = 6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x = 9{,}254$.

37. Высота равнобедренного треугольника равна 12,4 м, а основание 40,6 м. Найдите углы треугольника и боковую сторону.

38. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно 19 : 28. Найдите его углы.

39. Стороны прямоугольника равны 12,4 и 26. Найдите угол между диагоналями.

40. Диагонали ромба равны 4,73 и 2,94. Найдите его углы.

41. Сторона ромба 241 м, высота 120 м. Найдите углы.

42. Радиус окружности равен 5 м. Из точки, отстоящей от центра на 13 м, проведены касательные к окружности. Найдите длины касательных и угол между ними.

43. Тень от вертикально стоящего шеста, высота которого равна 7 м, составляет 4 м. Выразите в градусах высоту солнца над горизонтом.

44. Основание равнобедренного прямоугольного треугольника равно a. Найдите боковую сторону.

45. Найдите неизвестные стороны и острые углы прямоугольного треугольника по следующим данным:

1) по двум катетам:

а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 9$, $b = 40$;
в) $a = 20$, $b = 21$; г) $a = 11$, $b = 60$;

2) по гипотенузе и катету:

а) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 25$, $a = 7$;
в) $c = 17$, $a = 8$; г) $c = 85$, $a = 84$;

3) по гипотенузе и острому углу:

а) $c = 2$, $\alpha = 20^\circ$; б) $c = 4$, $\alpha = 50^\circ 20'$;
в) $c = 8$, $\alpha = 70^\circ 36'$; г) $c = 16$, $\alpha = 76^\circ 21'$;

4) по катету и противолежащему углу:

а) $a = 3$, $\alpha = 30^\circ 27'$; б) $a = 5$, $\alpha = 40^\circ 48'$;
в) $a = 7$, $\alpha = 60^\circ 35'$; г) $a = 9$, $\alpha = 68^\circ$.

46. Упростите выражения: 1) $1 - \sin^2 \alpha$;
2) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$; 3) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;

4) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$; 5) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
8) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 9) $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

47. Вычислите значения $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:
1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$.

48. Найдите $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:
1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}8$.

49. Постройте угол α, если известно, что: 1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$;
2) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}5$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{5}$; 5) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}7$.

50. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой a и острым углом 60° найдите катет, противолежащий этому углу.

51. Найдите радиус r окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, и радиус R окружности, описанной около него.

52. В треугольнике больший угол при основании равен 45°, а высота делит основание на части 20 см и 21 см. Найдите большую боковую сторону.

53. У треугольника одна из сторон равна 1 м, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите другие стороны треугольника.

54. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите углы между диагоналями.

55. Диагонали ромба равны a и $a\sqrt{3}$. Найдите углы ромба.

56. Какой из углов больше: α или β, если:
1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$;
3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\cos\beta = 0{,}74$;
5) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}1$, $\mathrm{tg}\,\beta = 2{,}5$; 6) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8}{3}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{5}{2}$?

57. У прямоугольного треугольника ABC угол A больше угла B. Какой из катетов больше: AC или BC?

58. У прямоугольного треугольника ABC катет BC больше катета AC. Какой угол больше: A или B?

59. У равнобедренного треугольника стороны равны 3 м и 7 м. Какая из них является основанием?

60. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.

61. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, если 1) $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $AC = 12$ м; 2) $AB = 10{,}7$, $BC = 17{,}1$, $AC = 6{,}4$.

62. Может ли у параллелограмма со сторонами 4 см и 7 см одна из диагоналей быть равной 2 см?
63. В треугольнике одна сторона равна 1,9 м, а другая 0,7 м. Найдите третью сторону, зная, что ее длина равна целому числу метров.
64. Докажите, что медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, меньше полусуммы сторон AB и AC.
65. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.
66. Известно, что диагонали четырехугольника пересекаются. Докажите, что сумма их длин меньше периметра, но больше полупериметра четырехугольника.
67. Даны четыре точки: A, B, C, D. Известно, что отрезки AB и CD пересекаются. Найдите точку, сумма расстояний от которой до точек A, B, C, D наименьшая.
68. Могут ли стороны треугольника быть пропорциональными числам 1, 2, 3?
69. Докажите, что в треугольнике каждая сторона меньше половины периметра.
70. Докажите, что любая хорда окружности не больше диаметра и равна ему только тогда, когда сама является диаметром.
71. Внутри окружности радиуса R взята точка на расстоянии d от центра. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до точек окружности.
72. Вне окружности радиуса R взята точка на расстоянии d от центра. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от этой точки до точек окружности.
73. Могут ли пересекаться окружности, центры которых находятся на расстоянии 20 см, а радиусы 8 см и 11 см? Объясните ответ.
74. Могут ли пересекаться окружности, центры которых находятся на расстоянии 5 см, а радиусы 6 см и 12 см? Объясните ответ.
75. Докажите, что в задаче 73 окружности находятся одна вне другой, а в задаче 74 окружность радиуса 6 см находится внутри окружности радиуса 12 см.
76. Могут ли пересекаться окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами d, если $R_1 + R_2 < d$?

§ 8. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Проведем на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые x и y — *оси координат* (рис. 124). Ось x (она обычно горизонтальна) называется *осью абсцисс*, а ось y — *осью ординат*. Точкой пересечения O — *началом коор-*

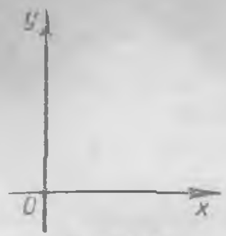


Рис. 124

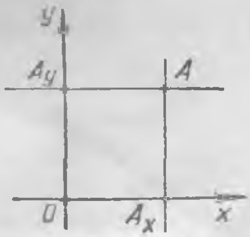


Рис. 125

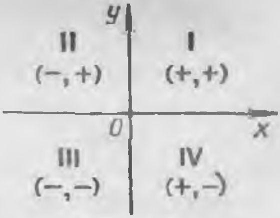


Рис. 126

динат — каждая из осей разбивается на две полуоси. Условимся одну из них называть *положительной*, отмечая ее стрелкой, а другую *отрицательной*.

Каждой точке A плоскости мы сопоставим пару чисел — *координаты точки* — абсциссу (x) и ординату (y) по такому правилу.

Через точку A проведем прямую, параллельную оси ординат (рис. 125). Она пересечет ось абсцисс x в некоторой точке A_x. *Абсциссой* точки A мы будем называть число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до A_x. Это число будет положительным, если A_x принадлежит положительной полуоси, отрицательным, если A_x принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси ординат y, то полагаем x равным нулю.

Ордината (y) точки A определяется аналогично. Через точку A проведем прямую, параллельную оси абсцисс x (см. рис. 125). Она пересечет ось ординат y в некоторой точке A_y. *Ординатой* точки A мы будем называть число y, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до A_y. Это число будет положительным, если A_y принадлежит положительной полуоси, отрицательным, если A_y принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси абсцисс x, то полагаем y равным нулю.

Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки, например: $A\,(x, y)$ (на первом месте — абсцисса, на втором — ордината).

Оси координат разбивают плоскость на четыре части — четверти — I, II, III, IV (рис. 126). В пределах одной четверти знаки обеих координат сохраняются и имеют значения, указанные на рисунке.

Точки оси x (оси абсцисс) имеют равные нулю ординаты ($y = 0$), а точки оси y (оси ординат) имеют равные нулю абсциссы ($x = 0$). У начала координат абсцисса и ордината равны нулю.

Плоскость, на которой введены описанным выше способом координаты x и y, будем называть плоскостью xy. Произвольную точку на этой плоскости с координатами x и y будем иногда обозначать просто (x, y).

Введенные на плоскости координаты x, y называются декартовыми, по имени французского ученого Р. Декарта (1596—1650), который впервые применил их в своих исследованиях.

З а д а ч а (9). Даны точки A (—3, 2) и B (4, 1). Докажите, что отрезок AB пересекает ось y, но не пересекает ось x.

Р е ш е н и е. Ось y разбивает плоскость xy на две полуплоскости. В одной полуплоскости абсциссы точек положительны, а в другой отрицательны. Так как у точек A и B абсциссы противоположных знаков, то точки A и B лежат в разных полуплоскостях. А это значит, что отрезок AB пересекает ось y.

Ось x также разбивает плоскость xy на две полуплоскости. В одной полуплоскости ординаты точек положительны, а в другой — отрицательны. У точек A и B ординаты одного знака (положительны). Значит, точки A и B лежат в одной полуплоскости. А следовательно, отрезок AB не пересекается с осью x.

КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

Пусть A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) — две произвольные точки и C (x, y) — середина отрезка AB. *Найдем координаты* x, y *точки* C. Допустим, что отрезок AB не параллелен оси y, т. е. $x_1 \neq x_2$. Проведем через точки A, B, C прямые, параллельные оси y (рис. 127). Они пересекут ось x в точках A_1 $(x_1, 0)$, B_1 $(x_2, 0)$, C_1 $(x, 0)$. По теореме Фалеса точка C_1 будет серединой отрезка A_1B_1.

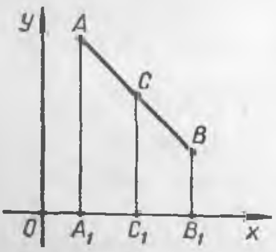


Рис. 127

Так как точка C_1 — середина отрезка A_1B_1, то $A_1C_1 = B_1C_1$, а значит, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Отсюда следует, что либо $x - x_1 = x - x_2$, либо $x - x_1 = -(x - x_2)$. Первое равенство невозможно, так как $x_1 \neq x_2$. Поэтому верно второе. А из него получается формула

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Если $x_1 = x_2$, т. е. отрезок AB параллелен оси y, то все три точки A_1, B_1, C_1 имеют одну и ту же абсциссу. Значит, формула остается верной и в этом случае.

Ордината точки C находится аналогично. Через точки A, B, C проводятся прямые, параллельные оси x. Получается формула

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

З а д а ч а (17). Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: A (1, 0), B (2, 3), C (3, 2). Найдите координаты четвертой вершины (D) и точки пересечения диагоналей.

Р е ш е н и е. Точка пересечения диагоналей является серединой каждой из них. Поэтому она является серединой отрезка AC, а значит, имеет координаты

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \qquad y = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Теперь, зная координаты точки пересечения диагоналей, находим координаты x, y четвертой вершины D. Пользуясь тем, что точка пересечения диагоналей является серединой отрезка BD, имеем:

$$\frac{2+x}{2} = 2, \qquad \frac{3+y}{2} = 1.$$

Отсюда $x = 2$, $y = -1$.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

Пусть на плоскости xy даны две точки: A_1 с координатами x_1, y_1 и A_2 с координатами x_2, y_2. *Выразим расстояние между точками A_1 и A_2 через координаты этих точек.*

Допустим, что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные осям координат, и обозначим через A точку их пересечения (рис. 128). Расстояние между точками A и A_1 равно $|y_1 - y_2|$, а расстояние между точками

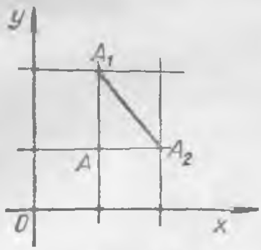


Рис. 128

A и A_2 равно $|x_1 - x_2|$. Применяя к прямоугольному треугольнику AA_1A_2 теорему Пифагора, получим:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \qquad (*)$$

где d — расстояние между точками A_1 и A_2.

Хотя формула $(*)$ для расстояния между точками выведена нами в предположении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, она остается верной и в других случаях. Действительно, если $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, то d равно $|y_1 - y_2|$. Тот же результат дает и формула $(*)$. Аналогично рассматривается случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. При $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ точки A_1 и A_2 совпадают и формула $(*)$ дает $d = 0$.

Задача (27). Найдите на оси x точку, равноудаленную от точек (1, 2) и (2, 3).

Решение. Пусть $(x, 0)$ — искомая точка. Приравнивая расстояния от нее до данных точек, получим:

$$(x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 2)^2 + (0 - 3)^2.$$

Отсюда находим: $x = 4$. Таким образом, искомая точка есть (4, 0).

УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Уравнением фигуры на плоскости в декартовых координатах называется уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. И обратно, любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.

Составим уравнение окружности с центром в точке $A_0(a, b)$ и радиусом R (рис. 129). Возьмем произвольную точку $A(x, y)$ на окружности. Расстояние от нее до центра A_0 равно R. Квадрат расстояния от точки A до A_0 равен $(x - a)^2 + (y - b)^2$. Таким образом, координаты x, y каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению

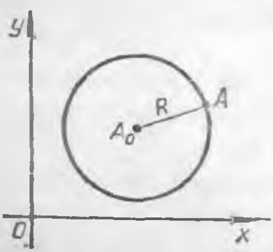


Рис. 129

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (*)$$

Обратно: любая точка A, координаты которой удовлетворяют уравнению (*), принадлежит окружности, так как расстояние от нее до точки A_0 равно R. Отсюда следует, что уравнение (*) действительно является уравнением окружности с центром A_0 и радиусом R.

Заметим, что если центром окружности является начало координат, то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Задача (33). При каком условии окружности с радиусами a и b и расстоянием между центрами c пересекаются?

Решение. Пусть O и O_1 — центры окружностей. Примем точку O за начало декартовой системы координат, а полупрямую OO_1 — за положительную полуось x. Уравнениями окружностей будут:

$$x^2+y^2=a^2, \quad (x-c)^2+y^2=b^2. \qquad (**)$$

Если окружности пересекаются, то координаты x, y точки пересечения удовлетворяют обоим уравнениям (**). И обратно, если система уравнений (**) имеет решение, т. е. существуют x и y, удовлетворяющие обоим уравнениям, то они являются координатами точки пересечения окружностей. Число точек пересечения, если окружности пересекаются, равно числу решений системы.

Будем решать систему уравнений (**). Для этого сначала вычтем уравнения почленно. Получим: $2cx-c^2=a^2-b^2$. Отсюда $x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$. Подставляя это значение x в первое уравнение, получим:

$$\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2+y^2=a^2.$$

Отсюда

$$y^2=a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2.$$

Преобразуем правую часть равенства как разность квадратов. Получим:

$$\left(a+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4c^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)=$$

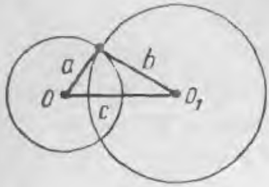


Рис. 130

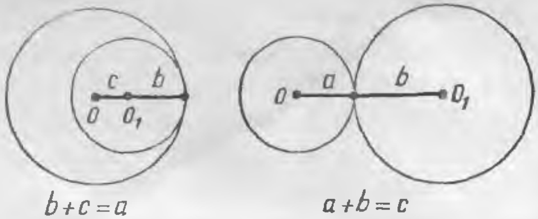


Рис. 131

$$= \frac{1}{4c^2}\left[(a+c)^2 - b^2\right]\left[b^2 - (a-c)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).$$

Итак,

$$y^2 = \frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a).$$

Отсюда видно, что если $a + c > b$, $a + b > c$ и $b + c > a$, то правая часть равенства положительна и, следовательно, система (**) имеет решения. Причем таких решений будет два. Соответственно окружности пересекаются в двух точках (рис. 130).

Если хотя бы один из сомножителей $a + c - b$, $a + b - c$, $b + c - a$ равен нулю, то система (**) имеет одно решение. Окружности касаются (рис. 131).

Если один из сомножителей в правой части отрицателен, то система (**) не имеет решений и окружности не пересекаются (рис. 132). Два сомножителя не могут быть отрицательными, так как тогда их сумма отрицательна. А она заведомо положительна. Например, если $a + c - b < 0$ и $a + b - c < 0$, то их сумма $(a + c - b) + (a + b - c) = 2a < 0$. А это невозможно. Точно так же будет и в других случаях.

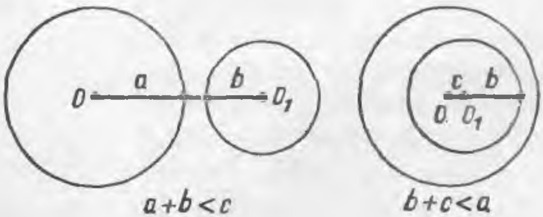


Рис. 132

Таким образом, *если одно из чисел a, b, c больше суммы двух других, то окружности не пересекаются; если одно из этих чисел равно сумме двух других, то окружности касаются; если каждое из этих чисел меньше суммы двух других, то окружности пересекаются в двух точках.*

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Докажем, что *любая прямая в декартовых координатах x, y имеет уравнение вида*

$$ax + by + c = 0. \qquad (*)$$

Пусть h — произвольная прямая на плоскости xy. Проведем какую-нибудь прямую, перпендикулярную прямой h, и отложим на ней от точки пересечения C с прямой h равные отрезки CA_1 и CA_2 (рис. 133).

Пусть a_1, b_1 — координаты точки A_1 и a_2, b_2 — координаты точки A_2. Как мы знаем, любая точка A (x, y) прямой h равноудалена от точек A_1 и A_2. Поэтому координаты ее удовлетворяют уравнению

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2. \qquad (**)$$

Обратно, если координаты x и y какой-нибудь точки удовлетворяют уравнению (**), то эта точка равноудалена от точек A_1 и A_2, а значит, принадлежит прямой h. Таким образом, уравнение (**) является уравнением прямой h. Если в этом уравнении раскрыть скобки и перенести все члены уравнения в левую его часть, то оно примет вид (*):

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

Утверждение доказано.

Задача (47). Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки A $(-1, 1)$, B $(1, 0)$.

Решение. Как мы знаем, наша прямая имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$. Точки A и B лежат на прямой, а значит, их координаты удовлетворяют этому уравнению. Подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой, получим:

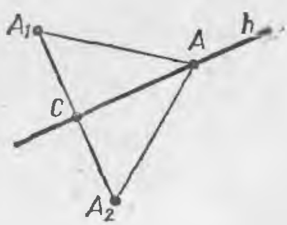


Рис. 133

$$-a + b + c = 0, \quad a + c = 0.$$

Из этих уравнений можно выразить два коэффициента, например a и b, через третий: $a = -c$, $b = -2c$. Подставляя эти значения a и b в уравнение прямой, получим:

$$-cx - 2cy + c = 0.$$

На c можно сократить. Тогда получим:

$$-x - 2y + 1 = 0.$$

Это и есть уравнение нашей прямой.

РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Выясним, как расположена прямая относительно осей координат, если ее уравнение $ax + by + c = 0$ *имеет тот или иной частный вид.*

1. $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнение прямой можно переписать так:

$$y = -\frac{c}{b}.$$

Таким образом, все точки прямой имеют одну и ту же ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$; следовательно, *прямая параллельна оси* x (рис. 134, *а*). В частности, если и $c = 0$, то прямая совпадает с осью x.

2. $b = 0$, $a \neq 0$. Этот случай рассматривается аналогично. *Прямая параллельна оси* y (рис. 134, *б*) и совпадает с ней, если и $c = 0$.

3. $c = 0$. *Прямая проходит через начало координат,* так как его координаты (0, 0) удовлетворяют уравнению прямой (рис. 134, *в*).

Если в общем уравнении прямой $ax + by + c = 0$ коэф-

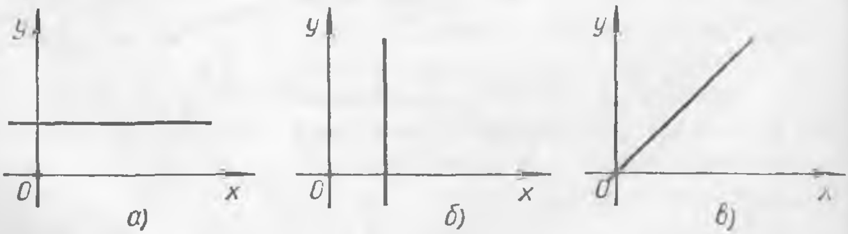


Рис. 134

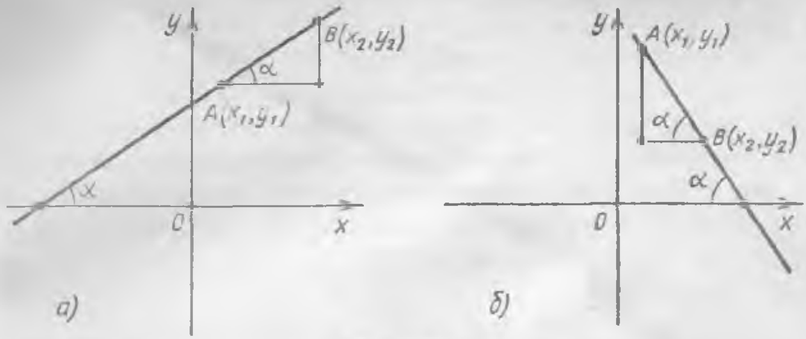


Рис. 135

фициент при y не равен нулю, то это уравнение можно разрешить относительно y. Получим:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Или, обозначая $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = q$, получим:

$$y = kx + q.$$

Выясним *геометрический смысл коэффициента k в этом уравнении*. Возьмем две точки на прямой $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $(x_1 < x_2)$. Их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_1 = kx_1 + q, \; y_2 = kx_2 + q.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

В случае, представленном на рисунке 135, *а*, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha$.

В случае, представленном на рисунке 135, *б*, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью x.

Коэффициент k в уравнении прямой называется *угловым коэффициентом прямой*.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ОКРУЖНОСТЬЮ

Рассмотрим вопрос о пересечении прямой с окружностью. Пусть R — радиус окружности и d — расстояние от центра окружности до прямой. Примем центр окружности за начало координат, а прямую, перпендикулярную к данной, — за ось x (рис. 136). Тогда уравнением окружности будет $x^2 + y^2 = R^2$, а уравнением прямой $x = d$. Для того чтобы прямая и окружность пересекались, надо, чтобы система двух уравнений

$$x^2 + y^2 = R^2, \ x = d$$

имела решение. И обратно, всякое решение этой системы дает координаты x, y точки пересечения прямой с окружностью. Решая нашу систему, получим:

$$x = d, \ y = \pm \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Из выражения для y видно, что система имеет два решения, т. е. *окружность и прямая имеют две точки пересечения, если* $R > d$ (рис. 136, *а*). Система имеет одно решение (*прямая и окружность касаются,* рис. 136, *б*), если $R = d$. Система не имеет решения, т. е. *прямая и окружность не пересекаются, если* $R < d$ (рис. 136, *в*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА ДЛЯ ЛЮБОГО УГЛА ОТ 0° ДО 180°

До сих пор значения синуса, косинуса и тангенса были определены только для острых углов. Теперь мы определим их для любого угла от 0° до 180°. Возьмем окружность на

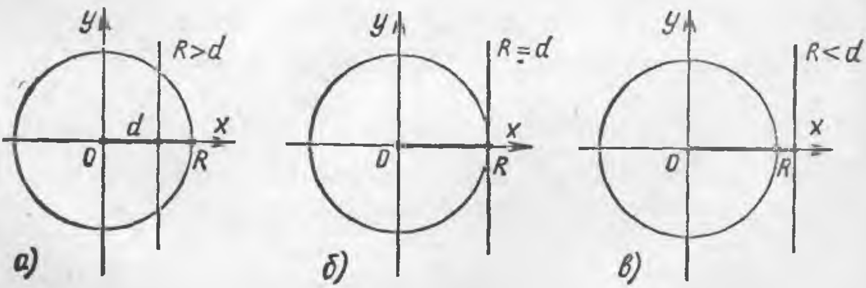


Рис. 136

плоскости xy с центром в начале координат и радиусом R (рис. 137). Пусть α — острый угол, который образует радиус OA с положительной полуосью x. Пусть x и y — координаты точки A. Значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ для острого угла α выражаются через координаты точки A, а именно:

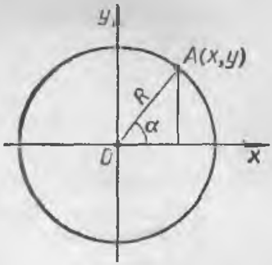


Рис. 137

$$\cos\alpha = \frac{x}{R},\ \sin\alpha = \frac{y}{R},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Определим теперь значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ этими формулами *для любого угла* α. (Для $\operatorname{tg}\alpha$ угол $\alpha = 90°$ исключается.) При таком определении $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$. Считая, что совпадающие лучи образуют угол $0°$, будем иметь: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$.

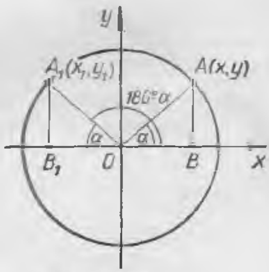


Рис. 138

Теорема 8.1. *Для любого угла* α, $0° < \alpha < 180°$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. *Для угла* $\alpha \neq 90°$ $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство. Треугольники OAB и OA_1B_1 равны по гипотенузе и острому углу (рис. 138). Из равенства треугольников следует, что $AB = A_1B_1$, т. е. $y = y_1$, $OB = OB_1$; следовательно, $x = -x_1$. Поэтому

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{y_1}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

Разделив почленно равенство $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ на равенство $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Теорема доказана.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Объясните, как определяются координаты точки.
2. Какие знаки у координат точки, если она принадлежит первой (второй, третьей, четвертой) четверти?
3. Чему равны абсциссы точек, лежащих на оси ординат?

Чему равны ординаты точек, лежащих на оси абсцисс? Чему равны координаты начала координат?
4. Выведите формулы для координат середины отрезка.
5. Выведите формулу для расстояния между точками.
6. Что такое уравнение фигуры в декартовых координатах?
7. Выведите уравнение окружности.
8. Докажите, что прямая в декартовых координатах имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$.
9. Как расположена прямая, если в ее уравнении $ax + by + c = 0$ коэффициент $a = 0$ (коэффициент $b=0$, коэффициент $c = 0$)?
10. Какой геометрический смысл имеет коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + q$?
11. При каком условии прямая и окружность не пересекаются, пересекаются в двух точках, касаются?
12. Дайте определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0° до 180°.
13. Докажите, что для любого угла α, $0° < \alpha < 180°$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проведите оси координат, выберите единицу длины на осях, постройте точки с координатами: (1, 2), (—2, 1), (—1, —3), (2, —1).
2. Возьмите наудачу четыре точки на плоскости xy. Найдите координаты этих точек.
3. На прямой, параллельной оси x, взяты две точки. У одной из них ордината $y = 2$. Чему равна ордината другой точки?
4. На прямой, перпендикулярной оси x, взяты две точки. У одной из них абсцисса $x = 3$. Чему равна абсцисса другой точки?
5. Из точки A (2, 3) опущен перпендикуляр на ось x. Найдите координаты основания перпендикуляра.
6. Через точку A (2, 3) проведена прямая, параллельная оси x. Найдите координаты точки пересечения ее с осью y.
7. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых абсцисса $x = 3$.
8. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых $|x| = 3$.
9. Даны точки A (—3, 2) и B (4, 1). Докажите, что отрезок AB пересекает ось y, но не пересекает ось x.
10. Какую из полуосей оси y (положительную или отрицательную) пересекает отрезок AB в предыдущей задаче?
11. Найдите расстояние от точки (—3, 4) до: 1) оси x; 2) оси y.

12. Найдите расстояние от точки (—3, 4) до начала координат.
13. На биссектрисе первой четверти взята точка с ординатой $y = 2$. Чему равна абсцисса этой точки?
14. Решите предыдущую задачу, если точка находится на биссектрисе второй четверти.
15. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых $x = y$.
16. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых $x = -y$.
17. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: A (1, 0), B (2, 3), C (3, 2). Найдите координаты четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей.
18. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (—1, —2), B (2, —5), C (1, —2), D (—2,1) является параллелограммом. Найдите точку пересечения его диагоналей.
19. Найдите координаты середины отрезка с концами (2, 0) и (0, 2).
20. Даны один конец отрезка (1, 1) и его середина (2, 2). Найдите второй конец отрезка.
21. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (4, 1), B (0, 4), C(—3, 0), D (1, —3) является квадратом.
22. Докажите, что четыре точки (1, 0), (—1, 0), (0, 1), (0, —1) являются вершинами квадрата.
23. Найдите расстояние между точками: 1) (1, 0) и (3, 0); 2) (1, 0) и (—3, 0).
24. Докажите, что расстояние между точками (x_1, 0) и (x_2, 0) оси x при любых x_1 и x_2 определяется по формуле $d = |x_2 - x_1|$.
25. Даны три точки: A (4, —2); B (1, 2); C (—2, 6). Найдите расстояния между этими точками, взятыми попарно.
26. Докажите, что точки A, B, C в задаче 25 лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?
27. Найдите на оси x точку, равноудаленную от точек (1, 2) и (2, 3).
28. Найдите точку, равноудаленную от осей координат и от точки (3, 6).
29. Какие из точек (1, 2), (3, 4), (—4, 3), (0, 5), (5, —1) лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$?
30. Найдите на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 169$, точки: 1) с абсциссой 5; 2) с ординатой —12.
31. Даны точки A (2, 0) и B (—2, 6). Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.
32. Даны точки A (—1, —1) и C (—4, 3). Составьте уравнение окружности с центром в точке C, проходящей через точку A.

33. При каком условии окружности с радиусами a и b и расстоянием c между центрами пересекаются?

34. Докажите, что если каждое из трех положительных чисел a, b, c меньше суммы двух других, то существует треугольник со сторонами, равными a, b, c.

35. Можно ли построить треугольник со сторонами: 1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 3) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 11$ см; 4) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 9$ см?

36. Найдите центр окружности на оси x, если известно, что окружность проходит через точку $(1, 4)$ и радиус окружности равен 5.

37. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ с осью x.

38. Найдите координаты точек пересечения двух окружностей:

$$x^2 + y^2 + 8x - 8y - 8 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 8y - 8 = 0.$$

39. Составьте уравнение окружности с центром в точке $(1, 2)$, касающейся оси x.

40. Составьте уравнение окружности с центром $(-3, 4)$, проходящей через начало координат.

41. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$ не пересекается с осью y.

42. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ касается оси y.

43. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек $(0, 1)$ и $(1, 2)$.

44. Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением: 1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y = 12$; 3) $3x - 2y + 6 = 0$; 4) $4x - 2y - 10 = 0$.

45. Найдите на прямой, заданной уравнением $3x + 4y = 1$, точку с абсциссой $x = -1$; точку с ординатой $y = -2$.

46. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:

1) $x + 2y + 3 = 0$, $\quad 4x + 5y + 6 = 0$;
2) $3x - y - 2 = 0$, $\quad 2x + y - 8 = 0$;
3) $4x + 5y + 8 = 0$, $\quad 4x - 2y - 6 = 0$.

47. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$.

48. Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами: 1) $(2, 3)$ и $(3, 2)$; 2) $(4, -1)$ и $(-6, 2)$; 3) $(5, -3)$ и $(-1, -2)$.

49. Чему равны коэффициенты a и b в уравнении прямой $ax + by = 1$, если известно, что она проходит через точки $(1, 2)$ и $(2, 1)$?

50. Чему равен коэффициент c в уравнении прямой $x + y + c = 0$, если она проходит через точку (1, 2)?
51. При каком значении c прямая $x + y + c = 0$ касается окружности $x^2 + y^2 = 1$?
52. Докажите, что три прямые $x + 2y = 3$, $2x - y = 1$ и $3x + y = 4$ пересекаются в одной точке.
53. Докажите, что прямые $x + 2y = 3$ и $2x + 4y = 3$ не пересекаются.
54. Составьте уравнение прямой, зная, что она параллельна оси x и проходит через точку (2, 3).
55. Составьте уравнение прямой, зная, что она проходит через начало координат и точку (2, 3).
56. Найдите синус, косинус и тангенс углов 120°, 135°, 150°.
57. Пользуясь таблицами, найдите: 1) sin 160°, 2) cos 140°, 3) tg 130°.
58. Пользуясь таблицами, найдите значения синуса, косинуса и тангенса углов: 1) 40°; 2) 14°36′; 3) 70°20′; 4) 80°16′; 5) 145°; 6) 150°30′; 7) 150°33′; 8) 170°28′.
59. Пользуясь таблицами, найдите углы, для которых: 1) $\sin\alpha_1 = 0{,}2$, 2) $\cos\alpha_2 = -0{,}7$, 3) $\operatorname{tg}\alpha_3 = -0{,}4$.
60. Найдите значения $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если: 1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha = -0{,}5$; 3) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
61. Найдите значения $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если: 1) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0° < \alpha < 180°$.
62. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
63. Постройте угол α, если известно, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.
64. Постройте угол α, если известно, что $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.
65. Докажите, что если $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha = \beta$.
66. Докажите, что если $\sin\alpha = \sin\beta$, то либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha = 180° - \beta$.

§ 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР

ПРИМЕРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФИГУР

Если каждую точку данной фигуры сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена *преобразованием* из данной. Приведем несколько примеров.

Рис. 139

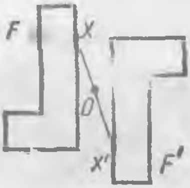


Рис. 140

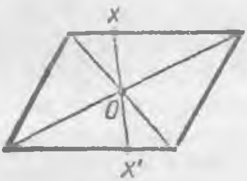


Рис. 141

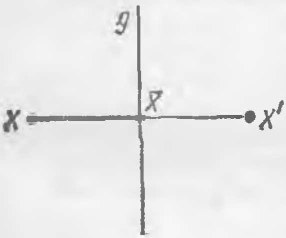


Рис. 142

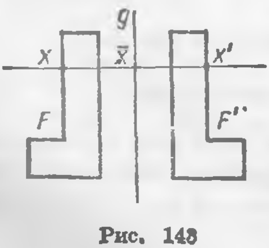


Рис. 143

Первый пример. Пусть O — фиксированная точка и X — произвольная точка плоскости (рис. 139). Отложим на продолжении отрезка OX за точку O отрезок OX', равный OX. Точка X' называется *симметричной* точке X относительно точки O. Точка, симметричная точке O, есть сама точка O. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной точки O, называется *преобразованием симметрии относительно точки* O. При этом фигуры F и F' называются *симметричными* относительно точки O (рис. 140).

Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру F в себя, то она называется *центрально-симметричной*, а точка O называется *центром симметрии*. Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Его центром симметрии является точка пересечения диагоналей (рис. 141).

Второй пример. Пусть g — фиксированная прямая (рис. 142). Возьмем произвольную точку X и опустим перпендикуляр $X\overline{X}$ на прямую g. На продолжении этого перпендикуляра за точку $\overline{X}$ отложим отрезок $\overline{X}X'$, равный отрезку $\overline{X}X$. Точка X' называется *симметричной* точке X относительно прямой g. Если точка X лежит на прямой g, то симметричная ей точка есть сама точка X. Очевидно, что точка, симметричная точке X', есть точка X.

Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной прямой g, называется *преобразованием симметрии относительно прямой* g. При этом фигуры F и F' называются *симметричными* относительно прямой g (рис. 143).

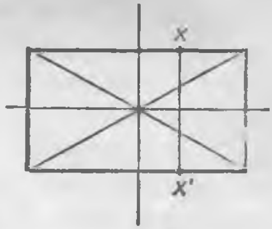


Рис. 144

Если преобразование симметрии относительно прямой g переводит фигуру F в себя, то эта фигура называется *симметричной относительно прямой* g, а прямая g называется *осью симметрии* фигуры. Например, прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей прямоугольника параллельно его сторонам, являются осями симметрии прямоугольника (рис. 144). Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 145).

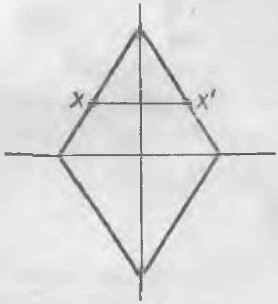


Рис. 145

З а д а ч а (6). Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

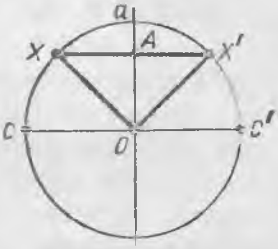


Рис. 146

Р е ш е н и е. Пусть O — центр окружности и a — прямая, проходящая через точку O (рис. 146). Очевидно, преобразование симметрии относительно прямой a переводит точку C окружности в точку C', а точку O оставляет на месте. Возьмем произвольную точку X на окружности и построим точку X', в которую переходит точка X при симметрии относительно прямой a.

Треугольники OAX и OAX' равны по первому признаку. У них углы при вершине A прямые, сторона OA общая, а стороны AX и AX' равны по определению симметрии. Из равенства треугольников следует равенство сторон

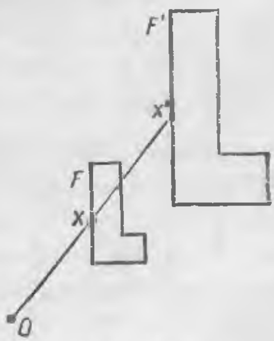


Рис. 147

OX и OX', т. е. точка X' лежит на окружности. А это значит, что окружность при симметрии относительно прямой a переходит в себя. Значит, a есть ось симметрии окружности.

Третий пример. Пусть F — данная фигура и O — фиксированная точка (рис. 147). Проведем через произвольную точку X фигуры F луч OX и отложим на нем отрезок OX', равный $k \cdot OX$, где k — положительное число. Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка X переходит в точку X', построенную указанным способом, называется *гомотетией относительно центра O*. Число k называется *коэффициентом гомотетии*. Фигуры F и F' называются *гомотетичными*.

ДВИЖЕНИЕ

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, т. е. переводит любые две точки X и Y фигуры F в точки X', Y' фигуры F' так, что $XY = X'Y'$.

Теорема 9.1. *Преобразование симметрии относительно точки является движением.*

Доказательство. Пусть X и Y — две произвольные точки фигуры F (рис. 148). Преобразование симметрии относительно точки O переводит их в точки X' и Y'. Рассмотрим треугольники XOY и $X'OY'$. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OX = OX'$, $OY = OY'$ по определению симметрии относительно точки O. Из равенства треугольников следует равенство сторон $XY = X'Y'$. А это значит, что симметрия относительно точки O есть движение. Теорема доказана.

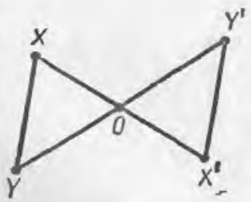


Рис. 148

Теорема 9.2. *Преобразование симметрии относительно прямой является движением.*

Доказательство. Примем данную прямую за ось y декартовой системы координат (рис. 149). Пусть произвольная точка X (x, y) фигуры F переходит в точку X' (x', y') фигуры F'.

Из определения симметрии относительно прямой следует, что у точек X и X' равные ординаты, а абсциссы отличаются только знаком: $x' = -x$.

Возьмем две произвольные точки $X_1\ (x_1, y_1)$ и $X_2\ (x_2, y_2)$. Они перейдут в точки $X_1'\ (-x_1, y_1)$ и $X_2'\ (-x_2, y_2)$.

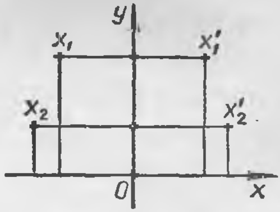


Рис. 149

Имеем:

$$X_1X_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$X_1'X_2'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда видно, что $X_1X_2 = X_1'X_2'$. А это значит, что преобразование симметрии относительно прямой есть движение. Теорема доказана.

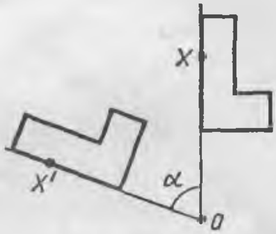


Рис. 150

Поворотом около данной точки называется такое движение, при котором каждый луч, исходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении (по часовой стрелке или против часовой стрелки) (рис. 150).

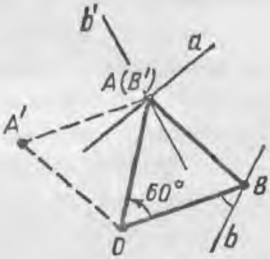


Рис. 151

З а д а ч а (14). Постройте равносторонний треугольник, у которого одна вершина задана, а две другие вершины лежат на двух данных прямых.

Р е ш е н и е. Пусть OAB — искомый треугольник, у которого вершина O задана, а вершины A и B лежат на данных прямых a и b (рис. 151). Выполним поворот прямой b около точки O на $60°$. При этом она перейдет в прямую b', проходящую через точку A. Таким образом, чтобы найти вершину A, достаточно построить прямую b'. Вершина A будет точкой пересечения прямых a и b'.

Для построения прямой b' достаточно взять любые две точки прямой b и построить точки, в которые они переходят при повороте. Прямая b' будет проходить через эти точки.

Построив вершину A, строим вершину B. Она совпадает с точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку OA и прямой b. Соединяя точки O, A, B отрезками, получаем искомый треугольник.

Теорема 9.3. *При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.*

Это значит, что если точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1, то эти точки также лежат на прямой; если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Доказательство. Пусть точка B лежит между точками A и C. Если точки A_1, B_1, C_1 не лежат на прямой, то они являются вершинами треугольника.

Поэтому $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. По определению движения отсюда следует, что $AC < AB + BC$. Однако по свойству измерения отрезков $AC = AB + BC$.

Мы пришли к противоречию. Первое утверждение теоремы доказано.

Покажем теперь, что точка B_1 лежит между A_1 и C_1. Допустим, что A_1 лежит между B_1 и C_1. Тогда $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$ и, следовательно, $AB + AC = BC$. Но это противоречит равенству $AB + BC = AC$. Таким образом, точка A_1 не может лежать между B_1 и C_1. Аналогично доказывается, что точка C_1 не может лежать между A_1 и B_1. Так как из трех точек A_1, B_1, C_1 одна лежит между двумя другими, то этой точкой может быть только B_1. Теорема доказана полностью.

Из теоремы 9.3 следует, что *при движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.*

Поясним это на примере отрезка. Пусть AB — данный отрезок. При движении точки A и B переходят в некоторые точки A' и B' (рис. 152). Покажем, что отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$. Возьмем произвольную точку X на отрезке AB. Она переходит в некоторую точку X' прямой $A'B'$, лежащую между точками A' и B' (теорема 9.3), т. е. точка X отрезка AB переходит в точку X' отрезка $A'B'$. Для всякой

Рис. 152

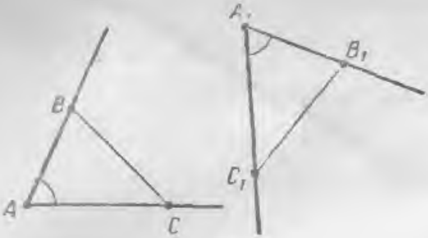


Рис. 153

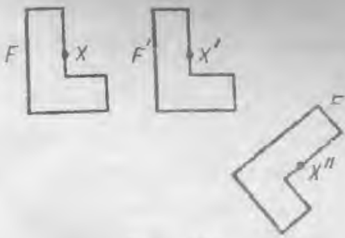


Рис. 154

ли точки X' отрезка $A'B'$ найдется точка X отрезка AB, которая при нашем движении переходит в точку X'? Да, для всякой точки. Если взять такую точку X на отрезке AB, что $AX = A'X'$, то она как раз и переходит в точку X'.

Пусть AB и AC — две полупрямые, исходящие из точки A, не лежащие на одной прямой (рис. 153). При движении эти полупрямые переходят в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$. Следовательно, *при движении сохраняются углы между полупрямыми.*

Пусть фигура F переводится движением в фигуру F', а фигура F' переводится движением в фигуру F'' (рис. 154). Пусть при первом движении точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', а при втором движении точка X' фигуры F' переходит в точку X'' фигуры F''. Тогда преобразование фигуры F в фигуру F'', при котором произвольная точка X фигуры F переходит в точку X'' фигуры F'', сохраняет расстояние между точками, а значит, является также движением. Это свойство движения выражают словами: *два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.*

Пусть преобразование фигуры F в фигуру F' переводит различные точки фигуры F в различные точки фигуры F'. Пусть произвольная точка X фигуры F при этом преобразовании переходит в точку X' фигуры F'. Преобразование фигуры F' в фигуру F, при котором точка X' переходит в точку X, называется преобразованием, *обратным* данному. Движение сохраняет расстояние между точками, поэтому переводит различные точки в различные. Очевидно, *преобразование, обратное движению, является также движением.*

РАВЕНСТВО ФИГУР

Фигуры F и F' называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую.

Для обозначения равенства фигур используется обычный знак равенства. Запись $F = F'$ означает, что фигура F равна F'. В записи равенства треугольников: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — предполагается, что совмещаемые при движении вершины стоят на соответствующих местах. При таком условии *равенство треугольников, определяемое через их совмещение движением, и равенство, как мы его понимали до сих пор, выражают одно и то же.* Докажем это.

Пусть треугольник ABC совмещается движением с треугольником $A_1B_1C_1$, причем вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1 и C — в C_1. Так как при движении сохраняются расстояния и углы, то для наших треугольников $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, т. е. треугольники равны в том смысле, как мы это понимали до сих пор.

Пусть теперь у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что они совмещаются движением, причем вершина A переходит в вершину A_1, B — в B_1 и C — в C_1. Подвергнем треугольник ABC преобразованию симметрии относительно прямой a, перпендикулярной к отрезку AA_1 и проходящей через его середину (рис. 155). Получим треугольник $A_1B_2C_2$. Подвергнем его симметрии относительно прямой b, соединяющей точку A_1 с серединой отрезка B_1B_2. Получим треугольник $A_1B_1C_3$.

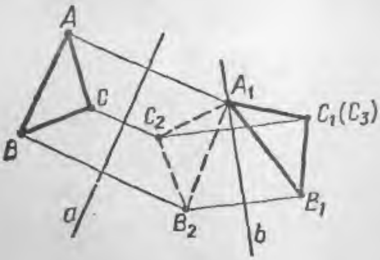


Рис. 155

Если точки C_1 и C_3 лежат по одну сторону прямой A_1B_1, то они совпадают. Действительно, так как углы $B_1A_1C_1$ и $B_1A_1C_3$ равны, то лучи A_1C_1 и A_1C_3 совпадают, а так как отрезки A_1C_1 и A_1C_3 равны, то совпадают точки C_1 и C_3.

Таким образом, треугольник ABC движением переведен в треугольник $A_1B_1C_1$.

Если точки C_1 и C_3 лежат по разные стороны прямой A_1B_1, то надо еще применить симметрию относительно прямой A_1B_1.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз (рис. 156). Это значит, что если произвольные точки X, Y фигуры F при преобразовании подобия переходят в точки X', Y' фигуры F', то $X'Y' = k \cdot XY$, причем число k одно и то же для всех точек X, Y. Число k называется *коэффициентом подобия*.

Теорема 9.4. *Гомотетия есть преобразование подобия.*

Доказательство. Пусть O — центр гомотетии и k — коэффициент гомотетии (рис. 157). Введем декартовы координаты x, y, приняв точку O за начало координат. Рассмотрим преобразование, при котором произвольная точка (x, y) переходит в точку (kx, ky). Мы утверждаем, что это и есть наша гомотетия.

Пусть $A\ (x_1, y_1)$ — произвольная точка фигуры. Она переходит в точку $A'\ (kx_1, ky_1)$. Прямая OA проходит через начало координат, а значит, имеет уравнение вида $ax + by = 0$. Ему удовлетворяют координаты точки A', так как $akx_1 + bky_1 = k(ax_1 + by_1) = 0$. Значит, точка A' лежит на прямой OA. А так как x_1 и kx_1, y_1 и ky_1 одного знака, то A' лежит на луче OA.

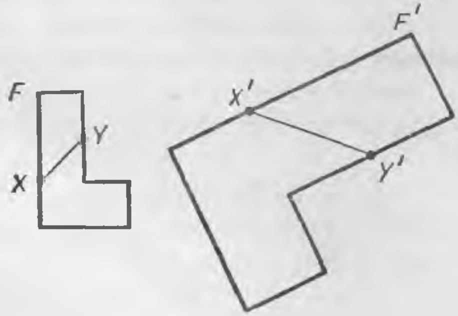


Рис. 156

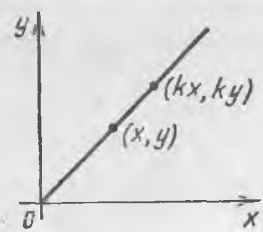


Рис. 157

Имеем:

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},\ OA' = \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2} = k\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Отсюда $OA' = kOA$. Следовательно, преобразование действительно является гомотетией относительно центра O с коэффициентом гомотетии k.

Возьмем теперь две произвольные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Они переходят в точки $A'(kx_1, ky_1)$, $B'(kx_2, ky_2)$. Имеем:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (kx_2 - kx_1)^2 + (ky_2 - ky_1)^2 =$$
$$= k^2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = k^2AB^2.$$

Отсюда $A'B' = kAB$. А это и значит, что рассматриваемое преобразование есть преобразование подобия. Теорема доказана.

Так же, как и для движения, доказывается, что при преобразовании подобия три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A_1, B_1, C_1, также лежащие на одной прямой. Причем, если точка B лежит между точками A и C, то B_1 лежит между точками A_1 и C_1. Отсюда следует, что ***преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.***

Докажем, что ***преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми.*** Действительно, пусть угол ABC преобразованием подобия с коэффициентом k переводится в угол $A_1B_1C_1$ (рис. 158). Подвергнем угол ABC преобразованию гомотетии относительно его вершины B с коэффициентом гомотетии k. При этом точки A и C перейдут в точки A_2 и C_2. Треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку. Из равенства треугольников следует равенство углов A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$. Значит, углы ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Что и требовалось доказать.

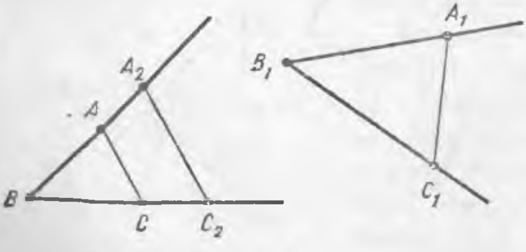


Рис. 158

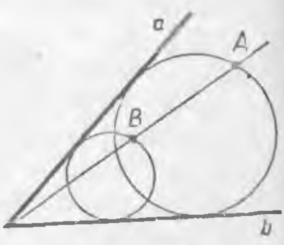


Рис. 159

З а д а ч а (36). Даны угол (ab) и внутри него точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.

Р е ш е н и е. Строим какую-нибудь окружность, касающуюся сторон угла (рис. 159). Проводим прямую через вершину угла и точку A. Пусть B — точка пересечения этой прямой с построенной окружностью. Гомотетия относительно вершины угла, переводящая точку B в точку A, переводит построенную окружность в искомую.

ПОДОБИЕ ФИГУР

Две фигуры F и F' называются *подобными*, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия. Для обозначения подобия фигур используется специальный значок: $\backsim$. Запись $F \backsim F'$ читается так: «Фигура F подобна фигуре F'». В записи подобия треугольников: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — предполагается, что вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах, т. е. A переходит в A_1, B в B_1 и C в C_1.

Из свойств преобразования подобия следует, что *у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны*. В частности, *у подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$*

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Признаки подобия треугольников дает следующая теорема:

Т е о р е м а 9. 5. *Два треугольника подобны:*

1) *если два угла одного соответственно равны двум углам другого;*

2) *если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами, равны;*

3) *если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, для которых выполняется одно из условий: 1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$; 2) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;

$$3)\ \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

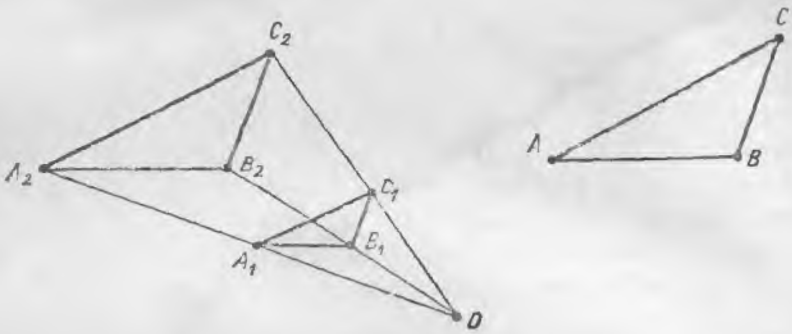


Рис. 160

Докажем, что треугольники подобны. Пусть $k = \frac{AB}{A_1B_1}$. Подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ какому-нибудь преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например преобразованию гомотетии (рис. 160). При этом получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику ABC. Действительно, в первом случае имеем:

$$\angle A = \angle A_1 = \angle A_2, \ \angle B = \angle B_1 = \angle B_2,$$
$$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB.$$

Треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по второму признаку равенства треугольников.

Во втором случае

$$\angle A = \angle A_2, \ A_2B_2 = AB, \ A_2C_2 = AC.$$

Треугольники равны по первому признаку равенства треугольников.

В третьем случае

$$A_2B_2 = AB, \ B_2C_2 = BC, \ A_2C_2 = AC.$$

Треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников. Так как треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику ABC, то он переводится в него движением. Значит, треугольник $A_1B_1C_1$ переводится в треугольник ABC последовательным выполнением преобразования подобия и движения, а это есть преобразование подобия. Признаки подобия треугольников доказаны.

З а д а ч а (37). Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S. Докажите, что $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

Р е ш е н и е. Проведем прямую BD (рис. 161). Точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой BD, именно в полуплоскости, где лежит точка S.

Значит, вписанные углы DCB и DAB равны. Таким же способом доказываем равенство вписанных углов ABC и ADC. Из равенства указанных углов следует, что треугольники ASD и CSB подобны (теорема 9.5) Из подобия треугольников следует пропорция

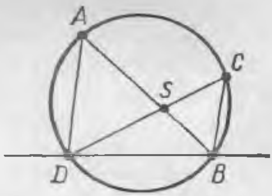


Рис. 161

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}.$$

Отсюда $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Объясните, какие точки называются симметричными относительно данной точки.
2. Какое преобразование называется симметрией относительно данной точки?
3. Какая фигура называется центрально-симметричной?
4. Что такое центр симметрии фигуры? Приведите пример центрально-симметричной фигуры.
5. Какие точки называются симметричными относительно данной прямой?
6. Какое преобразование называется симметрией относительно данной прямой?
7. Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой?
8. Что такое ось симметрии фигуры? Приведите пример.
9. Какое преобразование называется гомотетией? Что такое центр гомотетии, коэффициент гомотетии?
10. Какое преобразование фигуры называется движением?
11. Докажите, что симметрия относительно точки есть движение.
12. Докажите, что симметрия относительно прямой есть движение.
13. Объясните, что такое поворот.
14. Докажите, что при движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
15. Во что переходят прямые, полупрямые, отрезки при движении?
16. Докажите, что при движении сохраняются углы.
17. Какие фигуры называются равными?
18. Докажите, что отрезки равной длины и углы с равной градусной мерой совмещаются движением.
19. Что такое преобразование подобия?
20. Докажите, что гомотетия есть преобразование подобия.

21. Докажите, что преобразование подобия сохраняет углы.
22. Какие фигуры называются подобными?
23. Сформулируйте и докажите признаки подобия треугольников.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте точки, симметричные точкам A (1, 1), B (2, 3), C (—3, 1), D (—2, 2), E (—3, —4), F (2, —1) относительно начала координат.
2. Постройте точки, симметричные двум вершинам треугольника, относительно третьей его вершины.
3. Докажите, что центр окружности является ее центром симметрии.
4. 1) Постройте точки, симметричные точкам A (1, 1), B (—2, 3), C (0, —1) относительно оси x.
   2) Постройте точки, симметричные точкам D (2, 0), E (—4, 1), F (—2, —2) относительно оси y.
5. Дан треугольник ABC. Постройте точку C', симметричную C относительно прямой AB, пользуясь циркулем.
6. Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.
7. Постройте точки, в которые при гомотетии с центром в начале координат переходят точки A (1, 2), B (2, 2), C (—1, 1), D (3, —1), если коэффициент гомотетии равен: 1) 2, 2) 3.
8. При гомотетии точка X переходит в точку X', а точка Y — в точку Y'. Найдите центр гомотетии, если точки X, X', Y, Y' не лежат на одной прямой.
9. При гомотетии точка X переходит в X'. Постройте центр гомотетии, если k равен: 1) 2; 2) 3; 3) 4.
10. При симметрии относительно некоторой точки точка X переходит в точку X'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка Y.
11. При симметрии относительно некоторой прямой точка X переходит в точку X'. Постройте точку, в которую при этой симметрии переходит точка Y.
12. Расстояние между любыми двумя точками одной фигуры меньше 10 см, а расстояние между некоторыми двумя точками другой фигуры больше 10 см. Могут ли эти две фигуры быть симметричными относительно: 1) точки; 2) прямой?
13. Постройте фигуру, в которую переходит треугольник ABC при повороте его около вершины C на угол 60°: 1) по часовой стрелке; 2) против часовой стрелки.
14. Постройте равносторонний треугольник, у которого одна вершина задана, а две другие вершины лежат на двух данных прямых.
15. Может ли у треугольника быть центр симметрии?

16. Докажите, что четырехугольник, у которого есть центр симметрии, является параллелограммом.
17. Докажите, что прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является осью симметрии треугольника.
18. 1) Докажите, что если у треугольника есть ось симметрии, то она проходит через одну из его вершин.
2) Докажите, что если у треугольника есть ось симметрии, то он равнобедренный.
3) Докажите, что если у треугольника есть две оси симметрии, то он равносторонний.
19. Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.
20. Даны отрезок AB и точка O, не лежащая на прямой AB. Что представляет собой фигура, симметричная отрезку AB относительно точки O? Постройте ее.
21. Даны прямая a и точка O, не лежащая на этой прямой. Что представляет собой фигура, симметричная прямой a относительно точки O? Постройте ее.
22. Сколько центров симметрии у фигуры, состоящей из двух параллельных прямых? Где они расположены?
23. Сколько осей симметрии у равностороннего треугольника?
24. Докажите, что у параллелограмма точка пересечения диагоналей является центром симметрии.
25. Сколько осей симметрии имеет отрезок?
26. Сколько осей симметрии имеет прямая?
27. Докажите, что прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей квадрата параллельно его сторонам, являются осями симметрии.
28. Докажите, что диагонали ромба являются его осями симметрии.
29. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.
30. Даны три попарно пересекающиеся прямые: a, b, c. Постройте отрезок, перпендикулярный к прямой b, с серединой на прямой b и концами на прямых a и c.
31. У параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$: $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Докажите, что параллелограммы равны, т. е. совмещаются движением.
32. Докажите, что два ромба равны, если у них равны диагонали.
33. Докажите, что две окружности одинакового радиуса равны, т. е. совмещаются движением.
34. Докажите, что фигура, подобная окружности, есть окружность.
35. Найдите геометрическое место точек, которые делят в

отношении $m : n$ все хорды, имеющие общим концом данную точку окружности.

36. Даны угол и внутри него точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.

37. Хорды окружности AB и CD пересекаются в точке S. Докажите, что $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

38. Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на данной стороне.

39. Стороны треугольника относятся как $4 : 5 : 6$. Найдите стороны подобного треугольника, если меньшая из них равна 0,8 м.

40. Стороны треугольника относятся как $2 : 5 : 4$. Найдите стороны подобного треугольника, если его периметр равен 55 м.

41. Докажите подобие равнобедренных треугольников с равными углами при вершинах, противолежащих основаниям.

42. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см; основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.

43. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.

44. Решите задачу 43 при условии, что $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.

45. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

46. Основание высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.

47. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

48. У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ проведены высоты BD и B_1D_1. Докажите, что $\dfrac{BD}{B_1D_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$.

49. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Вычислите сторону квадрата.

50. Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны треугольника ABC, прилежащие к углу B, в 2,5 раза больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$, прилежащих к углу B_1. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.

51. В треугольнике ABC сторона $AB = 15$ м, а сторона $AC = 20$ м. На стороне AB отложен отрезок $AD = 8$ м, а на стороне AC — отрезок $AE = 6$ м. Подобны ли треугольники: 1) ABC и ADE; 2) ABC и AED?

52. Решите предыдущую задачу при $AD = 9$ м и $AE = 12$ м.

53. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол $40°$, а у другого — угол, равный: 1) $50°$; 2) $60°$?

54. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке P, а сторону BC — в Q. Докажите, что треугольники ABC и PQC подобны.

55. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит его сторону AC в отношении $m : n$, считая от вершины C. В каком отношении она делит сторону BC?

56. В треугольнике ABC проведен отрезок DE, параллельный стороне AC (конец D отрезка лежит на стороне AB, а E — на стороне BC). Найдите AD, если $AB = 16$ см, $AC = 20$ см и $DE = 15$ см.

57. В задаче 56 найдите отношение $AD : BD$, если известно, что $AC : DE = \frac{5}{7} : \frac{4}{11}$.

58. Найдите длину отрезка DE в задаче 56, если:

1) $AC = 20$ см, $AB = 17$ см и $BD = 11{,}9$ см;
2) $AC = 18$ дм, $AB = 15$ дм и $AD = 10$ дм.

59. Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок $x = \frac{ac}{b}$.

60. Подобны ли два равносторонних треугольника?

61. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) $AB = 1$ м, $AC = 1{,}5$ м, $BC = 2$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 20$ см;
2) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}5$ м; $A_1B_1 = 8$ дм, $A_1C_1 = 16$ дм, $B_1C_1 = 12$ дм;
3) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}25$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 13$ см?

62. Стороны треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 5,5 м.

63. Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух соответствующих сторон равна 1 м. Найдите эти стороны.

64. Длина тени фабричной трубы равна 35,8 м; в это же время вертикально воткнутый в землю кол высотой 1,9 м дает тень длиной 1,62 м. Найдите высоту трубы.

65. Постройте треугольник с заданным периметром, подобный данному.

66. В треугольник ABC вписан ромб $ADEF$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB = c$ и $AC = b$.
67. Найдите отношение отрезков диагонали трапеции, на которые она разбивается другой диагональю, если основания трапеции относятся как $m : n$.
68. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, делит одно основание в отношении $m : n$. В каком отношении она делит другое основание?
69. В трапеции $ABCD$ с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Найдите диагональ AC, если основания BC и AD соответственно равны 12 м и 27 м.
70. Линия, параллельная основаниям трапеции, делит одну боковую сторону в отношении $m : n$. В каком отношении делит она вторую боковую сторону?
71. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите стороны треугольника AED, если $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $AD = 15$ см.
72. Найдите высоту треугольника AED из задачи 71, если $BC = 7$ см, $AD = 21$ см и высота трапеции равна 3 см.
73. У равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и противолежащим углом $36°$ проведена биссектриса AD. 1) Докажите подобие треугольников ABC и CAD. 2) Найдите основание треугольника ABC, если его боковая сторона равна a.
74. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность, если $AM \cdot CM = BM \cdot DM$.
75. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены две секущие, которые пересекают окружность в точках B_1 и C_1, B_2 и C_2 (B_1 лежит между A и C_1, а B_2 — между A и C_2). 1) Докажите подобие треугольников AB_1C_2 и AB_2C_1. 2) Докажите, что $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.
76. Из точки M проведены секущая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная с точкой касания C. Докажите, что квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей, т. е. $MC^2 = MA \cdot MB$.
77. Как далеко видно из самолета, летящего на высоте 4 км над Землей, если радиус Земли 6370 км?
78. Вычислите радиус горизонта, видимого с вершины телебашни в Останкино, высота которой 533 м.

8 класс

§ 10. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Введем на плоскости декартовы координаты x, y. Преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка (x, y) переходит в точку $(x + a,\ y + b)$, a и b постоянные, называется *параллельным переносом* (рис. 162). Параллельный перенос задается формулами

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b. \qquad (*)$$

Эти формулы выражают координаты x', y' точки, в которую переходит точка (x, y) при параллельном переносе.

Параллельный перенос есть движение. Действительно, две произвольные точки $A\,(x_1,\ y_1)$ и $B\,(x_2,\ y_2)$ переходят в точки $A'\ (x_1 + a,\ y_1 + b)$, $B'\ (x_2 + a,\ y_2 + b)$. Поэтому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B' = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда $AB = A'B'$. Таким образом, преобразование сохраняет расстояния, а значит, является движением.

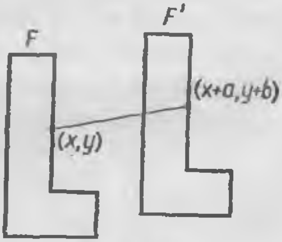


Рис. 162

Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что *при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.* Действительно, пусть точки $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ переходят в точки $A'(x_1+a, y_1+b)$ и $B'\ (x_2 + a,\ y_2 + b)$ (рис. 163). Середина отрезка AB' имеет координаты

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

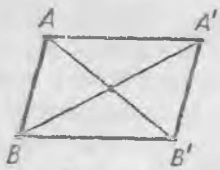


Рис. 163

Те же координаты имеет и середина

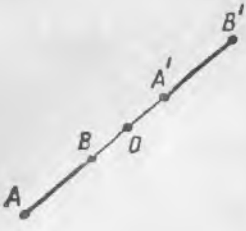


Рис. 164

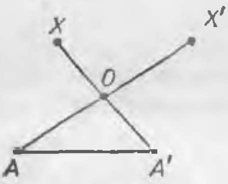


Рис. 165

отрезка $A'B$. Отсюда следует, что диагонали четырехугольника $AA'B'B$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм. А у параллелограмма противолежащие стороны AA' и BB' параллельны и равны.

Заметим, что у параллелограмма $AA'B'B$ параллельны и две другие противолежащие стороны AB и $A'B'$. Отсюда следует, что *при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).*

З а м е ч а н и е. В предыдущем доказательстве предполагалось, что точка B не лежит на прямой AA'. В случае, когда точка B лежит на прямой AA', точка B' тоже лежит на этой прямой, так как середина отрезка AB' совпадает с серединой отрезка BA' (рис. 164). Значит, все точки A, B, A', B' лежат на одной прямой. Далее,

$$AA' = \sqrt{(x_1 + a - x_1)^2 + (y_1 + b - y_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$BB' = \sqrt{(x_2 + a - x_2)^2 + (y_2 + b - y_2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, в этом случае точки A и B смещаются по прямой AB на одно и то же расстояние $\sqrt{a^2 + b^2}$, а прямая AB переходит в себя.

Т е о р е м а 10.1. *Каковы бы ни были две точки A и A', существует и притом единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с доказательства единственности. Пусть X — произвольная точка фигуры и X' — точка, в которую она переходит при параллельном переносе (рис. 165). Как мы знаем, отрезки XA' и AX' имеют общую середину O. Задание точки X однозначно определяет точку O — середину отрезка $A'X$. А точки A и O однозначно определяют точку X', так как O является серединой отрезка AX'. Однозначность в определении точки X' и означает единственность параллельного переноса.

Докажем существование параллельного переноса, переводящего точку A в A'. Введем декартовы координаты на плоскости. Пусть a_1, a_2 — координаты точки A и a_1', a_2' — координаты точки A'. Параллельный перенос, заданный формулами

$$x' = x + a_1' - a_1, \quad y' = y + a_2' - a_2,$$

переводит точку A в A'. Действительно, при $x = a_1$ и $y = a_2$ получаем: $x' = a_1'$, $y' = a_2'$. Теорема доказана полностью.

З а д а ч а (3). При параллельном переносе точка (1, 1) переходит в точку (—1, 0). В какую точку переходит начало координат?

Р е ш е н и е. Любой параллельный перенос задается формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$. Так как точка (1, 1) переходит в точку (—1, 0), то $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Отсюда $a = -2$, $b = -1$. Таким образом, наш параллельный перенос, переводящий точку (1, 1) в (—1, 0), задается формулами $x' = x - 2$, $y' = y - 1$. Подставляя в эти формулы координаты начала ($x = 0$, $y = 0$), получим: $x' = -2$, $y' = -1$. Итак, начало координат переходит в точку (—2, —1).

Т е о р е м а 10.2. *Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос. Два параллельных переноса, выполненные один за другим, дают снова параллельный перенос.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любой параллельный перенос задается формулами вида

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b.$$

Обратное преобразование задается формулами того же вида:

$$x = x' - a, \qquad y = y' - b,$$

а следовательно, является параллельным переносом. Первое утверждение доказано.

Пусть теперь имеем два параллельных переноса, заданные формулами

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b;$$
$$x'' = x' + c, \qquad y'' = y' + d.$$

Преобразование, которое получается в результате последовательного выполнения этих параллельных переносов, задается формулами

$$x'' = x + a + c, \qquad y'' = y + b + d.$$

Это преобразование есть параллельный перенос. Теорема доказана полностью.

ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

Некоторые физические величины (сила, скорость, ускорение и др.) характеризуются не только величиной, но и направлением. Например, для того чтобы охарактеризовать движение тела в данный момент, недостаточно сказать, что оно движется со скоростью 60 км/ч, надо еще указать направление его движения, т. е. направление скорости. В связи с этим указанные физические величины удобно изображать направленными отрезками. Такой способ изображения физических величин отличается не только наглядностью, но имеет также и другие основания. Приведем пример. Опыт показывает, что если к телу A приложены две силы a и b (рис. 166), то их действие равносильно действию одной силы c, которая изображается диагональю параллелограмма, построенного на отрезках a и b. Можно было бы привести и другие примеры, где операции над физическими величинами при изображении их направленными отрезками сводятся к простым геометрическим построениям, как в данном примере.

Направленный отрезок называется *вектором* (рис. 167). Для обозначения векторов будем пользоваться строчными латинскими буквами a, b, c, ... Иногда вектор обозначают указанием концов отрезка, изображающего вектор. Например, вектор a на рисунке 167 можно обозначить AB. При таком способе обозначения вектора a точка A называется *началом*, а точка B — *концом вектора* a. При обозначении вектора посредством указания концов изображающего его отрезка на первом месте всегда ставится начало вектора. Иногда вместо слова «вектор» над буквенным обозначением вектора ставится стрелка или черта, например, запись $\bar{a}$ читается: «вектор a».

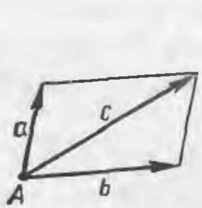


Рис. 166

Рис. 167

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА И НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА

Две полупрямые называются *одинаково направленными*, если они совмещаются параллельным переносом. То есть существует параллельный перенос, который переводит одну полупрямую в другую.

Если полупрямые a и b одинаково направлены и полупрямые b и c одинаково направлены, то полупрямые a и c тоже одинаково направлены.

Действительно, так как a и b одинаково направлены, то существует параллельный перенос, который переводит полупрямую a в b. Так как b и c одинаково направлены, то существует параллельный перенос, который переводит полупрямую b в c. Эти два параллельных переноса, выполненные последовательно, дают параллельный перенос, который переводит полупрямую a в c. Следовательно, полупрямые a и c одинаково направлены.

Две полупрямые называются *противоположно направленными*, если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой.

З а д а ч а (5). AB и CD — параллельные прямые. Точки A и D лежат по одну сторону секущей BC. Докажите, что лучи BA и CD одинаково направлены.

Р е ш е н и е. Подвергнем луч CD параллельному переносу, при котором точка C переходит в точку B (рис. 168). При этом прямая CD совместится с прямой BA. Точка D, смещаясь по прямой, параллельной CB, остается в той же полуплоскости относительно прямой BC. Поэтому луч CD совместится с лучом BA, а значит, эти лучи *одинаково направлены*.

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *одинаково направленными*, если полупрямые AB и CD одинаково направлены. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора $\overline{a}$ обозначается $|\overline{a}|$.

Рис. 168

Два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом. Это означает, что существует параллельный перенос, который переводит начало и

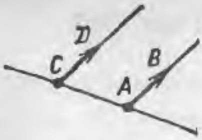


Рис. 169

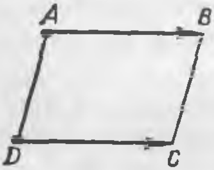


Рис. 170

конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора. Отсюда следует, что *равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине.* Обратно, *если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны.* Действительно, пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ — одинаково направленные векторы, равные по абсолютной величине (рис. 69). Параллельный перенос, переводящий точку C в точку A, совмещает полупрямую CD с полупрямой AB, так как они одинаково направлены. А так как отрезки AB и CD равны, то при этом точка D совмещается с точкой B, т. е. параллельный перенос переводит вектор $\overline{CD}$ в вектор $\overline{AB}$. Значит, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны.

З а д а ч а (9). $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

Р е ш е н и е. Подвергнем вектор $\overline{AB}$ параллельному переносу, при котором точка A переходит в точку D (рис. 170). При этом переносе точка A смещается по прямой AD, а значит, точка B смещается по параллельной прямой BC. Прямая AB переходит в параллельную прямую, а значит, в прямую DC. Следовательно, точка B переходит в C. Таким образом, наш параллельный перенос переводит вектор $\overline{AB}$ в вектор $\overline{DC}$, а значит, эти векторы равны.

Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор будем называть *нулевым вектором.* Нулевой вектор обозначается нулем с черточкой ($\overline{0}$). О направлении нулевого вектора не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю. Все нулевые векторы равны по определению.

Из свойств параллельного переноса (из теоремы 10.1) следует, что *от любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и только один.* Для доказательства достаточно выполнить параллельный перенос данного вектора, при котором его начало перейдет в заданную точку.

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Пусть вектор $\bar{a}$ имеет началом точку $A_1(x_1, y_1)$, а концом — точку $A_2(x_2, y_2)$. *Координатами* вектора $\bar{a}$ будем называть числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Координаты вектора будем ставить рядом с буквенным обозначением вектора, в данном случае $\bar{a}(a_1, a_2)$, или просто $\overline{(a_1, a_2)}$. Координаты нулевого вектора равны нулю.

Из формулы, выражающей расстояние между двумя точками через их координаты, следует, что абсолютная величина вектора с координатами a_1, a_2 равна $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Теорема 10.3. ***Равные векторы имеют равные соответствующие координаты.*** И обратно, ***если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.***

Доказательство. Пусть $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ — начало и конец вектора $\bar{a}$. Так как равный ему вектор $\bar{a}'$ получается из вектора $\bar{a}$ параллельным переносом, то его началом и концом будут соответственно: $A_1'(x_1 + c, y_1 + d)$, $A_2'(x_2 + c, y_2 + d)$. Отсюда видно, что оба вектора $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ имеют одни и те же координаты: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть соответствующие координаты векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1'A_2'}$ равны. Докажем, что векторы равны. Пусть x_1' и y_1' — координаты точки A_1', а x_2', y_2' — координаты точки A_2'. По условию теоремы $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, $y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$. Отсюда $x_2' = x_2 + x_1' - x_1$, $y_2' = y_2 + y_1' - y_1$. Параллельный перенос, заданный формулами

$$x' = x + x_1' - x_1, \quad y' = y + y_1' - y_1,$$

переводит точку A_1 в точку A_1', а точку A_2 в точку A_2', т. е. векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1'A_2'}$ равны. Теорема доказана.

Задача (13). Даны три точки: $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$. Найдите такую точку $D(x, y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.

Решение. Координатами вектора $\overline{AB}$ будут -2, -1. Координатами вектора $\overline{CD}$ будут $x - 0$, $y - 1$. Так как $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $x - 0 = -2$, $y - 1 = -1$. Отсюда находим координаты точки D: $x = -2$, $y = 0$.

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с координатами a_1, a_2 и b_1, b_2 называется вектор $\bar{c}$ с координатами $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, т. е.

$$\bar{a}\,(a_1, a_2) + \bar{b}\,(b_1, b_2) = \bar{c}\,(a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Для любых векторов $\bar{a}\,(a_1, a_2)$, $\bar{b}\,(b_1, b_2)$, $\bar{c}\,(c_1, c_2)$

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a},$$

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.$$

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, стоящих в правой и левой частях равенств. Мы видим, что они равны. А по теореме 10.3 векторы с соответственно равными координатами равны.

Теорема 10.4. *Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Доказательство. Пусть $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$, $C\,(x_3, y_3)$ — данные точки. Координатами вектора $\overline{AB}$ будут $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, координатами вектора $\overline{BC}$ будут $x_3 - x_2$, $y_3 - y_2$. Следовательно, координатами вектора $\overline{AB} + \overline{BC}$ будут $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$. А это есть координаты вектора $\overline{AC}$. По теореме 10.3 векторы $\overline{AB} + \overline{BC}$ и $\overline{AC}$ равны. Теорема доказана.

Теорема 10.4 дает следующий способ построения суммы произвольных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Надо от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}'$, равный вектору $\bar{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}'$, будет суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 171).

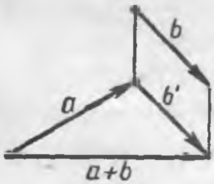


Рис. 171

Задача (16). $ABCD$ — параллелограмм. Докажите векторное равенство $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ (*«правило параллелограмма»* сложения векторов).

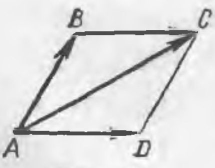


Рис. 172

Решение. Имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (рис. 172). Но векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ равны (см. задачу 9). Поэтому $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

Разностью векторов $\bar{a}\,(a_1, a_2)$ и $\bar{b}\,(b_1, b_2)$

называется такой вектор $\bar{c}\,(c_1, c_2)$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$: $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$. Отсюда находим координаты вектора $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$: $c_1 = a_1 - b_1$; $c_2 = a_2 - b_2$.

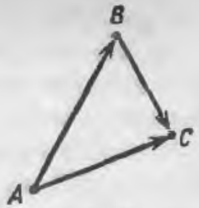


Рис. 173

Задача (19). Даны векторы с общим началом: $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 173). Докажите, что $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

Решение. Имеем: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. А это значит, что $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Произведением вектора $\overline{(a_1, a_2)}$ *на число* λ называется вектор $\overline{(\lambda a_1, \lambda a_2)}$, т. е.

$$\overline{(a_1, a_2)}\,\lambda = \overline{(\lambda a_1, \lambda a_2)}.$$

По определению $\overline{(a_1, a_2)}\,\lambda = \lambda\,\overline{(a_1, a_2)}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что ***для любого вектора*** $\bar{a}$ ***и чисел*** λ, μ

$$(\lambda + \mu)\,\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}.$$

Для любых двух векторов $\bar{a}$ ***и*** $\bar{b}$ ***и числа*** λ

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}.$$

Теорема 10.5. ***Абсолютная величина вектора*** $\lambda\bar{a}$ ***равна*** $|\lambda|\,|\bar{a}|$. ***Направление вектора*** $\lambda\bar{a}$ ***при*** $\bar{a} \neq \bar{0}$ ***совпадает с направлением вектора*** $\bar{a}$, ***если*** $\lambda > 0$, ***и противоположно направлению вектора*** $\bar{a}$, ***если*** $\lambda < 0$.

Доказательство. Построим векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, равные $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ соответственно (O — начало координат). Пусть a_1 и a_2 — координаты вектора $\bar{a}$. Тогда координатами точки A будут числа a_1 и a_2, а координатами точки B будут λa_1, λa_2. Уравнение прямой OA имеет вид:

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Так как уравнению удовлетворяют координаты точки $A\,(a_1, a_2)$, то ему удовлетворяют и координаты точки $B\,(\lambda a_1, \lambda a_2)$. Отсюда следует, что точка B лежит на прямой OA. Координаты c_1, c_2 любой точки C, лежащей на полупрямой OA, имеют те же знаки, что и координаты a_1, a_2 точки A, а координаты любой точки, которая лежит на полупрямой, дополнительной к OA, имеют противоположные знаки. Поэтому если $\lambda > 0$, то точка B лежит на полупрямой OA, а следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ одинаково направлены. Если $\lambda < 0$, то точка B лежит на дополнительной полупрямой, векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ противоположно направлены.

Абсолютная величина вектора $\lambda\overline{a}$ равна $|\lambda\overline{a}| = \sqrt{|\lambda a_1|^2 + |\lambda a_2|^2} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda||\overline{a}|$. Теорема доказана.

З а д а ч а (22). Даны различные точки: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

Р е ш е н и е. Координатами вектора $\overline{AB}$ будут $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$. Координатами вектора $\overline{BA}$ будут $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$. Мы видим, что $\overline{AB} = (-1)\,\overline{BA}$. А значит, по теореме 10.5 векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

Два отличных от нуля вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Т е о р е м а 10.6. ***У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\overline{a}(a_1, a_2)$ и $\overline{b}(b_1, b_2)$ — данные векторы. Допустим, что векторы коллинеарны. Рассмотрим вектор $\overline{c} = \pm\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\,\overline{b}$, где берется знак «+», когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ одинаково направлены, и знак «—», когда они противоположно направлены. Вектор $\overline{c}$ равен вектору $\overline{a}$, так как по теореме 10.5 они одинаково направлены и имеют одну и ту же абсолютную величину. Приравнивая координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{c}$, получим:

$$a_1 = \pm\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\,b_1, \quad a_2 = \pm\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}\,b_2.$$

Отсюда $\frac{b_1}{a_1} = \pm\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$, $\frac{b_2}{a_2} = \pm\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|}$. Значит, $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$, т. е. координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пропорциональны.

Пусть теперь у векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ координаты пропорциональны. Докажем, что векторы коллинеарны. Имеем:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}.$$

Обозначая общее значение этих отношений через λ, получим: $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$. Отсюда следует, что $\bar{b} = \lambda\bar{a}$. А это значит (теорема 10.5), что векторы коллинеарны.

Задача (31). Известно, что векторы $\bar{a}\,(1, -1)$ и $\bar{b}\,(-2, m)$ коллинеарны. Найдите, чему равно m.

Решение. У коллинеарных векторов координаты пропорциональны. Следовательно, $\frac{-2}{1}=\frac{m}{-1}$. Отсюда $m = 2$.

Вектор называется *единичным*, если его абсолютная величина равна единице. Единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей, называются *координатными векторами или ортами*. Мы будем их обозначать $\bar{e}_1\,(1, 0)$ на оси x и $\bar{e}_2\,(0, 1)$ на оси y.

Любой вектор $\bar{a}$ (a_1, a_2) допускает представление в виде

$$\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2.$$

Действительно, $\overline{(a_1, a_2)}=\overline{(a_1, 0)}+\overline{(0, a_2)}=a_1\,\overline{(1, 0)}+a_2\overline{(0, 1)}=$ $=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2$.

Задача (35). Даны векторы $\bar{a}\,(1, 0)$, $\bar{b}\,(1, 1)$, $\bar{c}\,(-1, 0)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы имело место векторное равенство $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.

Решение. Приравнивая соответствующие координаты векторов $\bar{c}$ и $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$, получим два уравнения, из которых находим λ и μ: $-1 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 1$, $0 = \lambda\cdot 0 +$ $+ \mu\cdot 1$. Отсюда $\mu = 0$, $\lambda = -1$.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Скалярным произведением векторов $\bar{a}\,(a_1, a_2)$ и $\bar{b}\,(b_1, b_2)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2$. Для скалярного произведения векторов используется такая же запись, как и для произведения чисел. Скалярное произведение $\bar{a}\bar{a}$ обозначается $\bar{a}^2$. Очевидно, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что для любых векторов $\bar{a}\,(a_1, a_2)$, $\bar{b}\,(b_1, b_2)$, $\bar{c}\,(c_1, c_2)$

$$(\bar{a}+\bar{b})\,\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}.$$

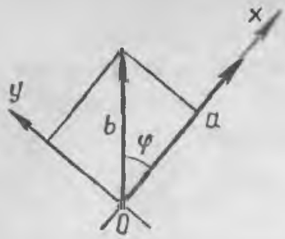


Рис. 174

Действительно, левая часть равенства есть $(a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2$, а правая $a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2$. Очевидно, они равны.

Углом между ненулевыми векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ называется угол BAC. Углом между любыми двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом.

Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Теорема 10.7. ***Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.***

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — данные векторы и φ — угол между ними. Имеем:

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b})\bar{a} + (\bar{a} + \bar{b})\bar{b} = \\ = \bar{a}\bar{a} + \bar{b}\bar{a} + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{b} = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2,$$

или

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2\bar{a}\bar{b}.$$

Отсюда видно, что скалярное произведение $\overline{ab}$ выражается через длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{a} + \bar{b}$, а поэтому не зависит от выбора системы координат, т. е. скалярное произведение не изменится, если систему координат выбрать специальным образом. Возьмем систему координат xy так, как показано на рисунке 174. При таком выборе системы координат координатами вектора $\bar{a}$ будут $|\bar{a}|$ и 0, а координатами вектора $\bar{b}$ будут $|\bar{b}| \cos \varphi$ и $|\bar{b}| \sin \varphi$. Скалярное произведение

$$\overline{ab} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \varphi + 0\,|\bar{b}| \sin \varphi = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \varphi.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 10.7 следует, что ***если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.*** И обратно, ***если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.***

Задача (47). Даны векторы $\bar{a}\,(1, 0)$ и $\bar{b}\,(1, 1)$. Найдите такое число λ, чтобы вектор $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ был перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

Решение. Имеем: $\bar{a}(\bar{a} + \lambda\bar{b}) = 0$, $\bar{a}^2 + \lambda(\overline{ab}) = 0$. Отсюда $\lambda = -\dfrac{\bar{a}^2}{\overline{ab}} = -\dfrac{1}{1} = -1$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Объясните, что такое параллельный перенос.
2. Докажите, что параллельный перенос есть движение.
3. Докажите, что при параллельном переносе точки фигуры смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.
4. Докажите, что при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).
5. Докажите существование и единственность параллельного переноса, переводящего данную точку A в данную точку A'.
6. Докажите, что преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос. Два параллельных переноса, выполненные один за другим, дают снова параллельный перенос.
7. Что такое вектор?
8. Какие полупрямые называются одинаково направленными?
9. Докажите, что если полупрямая a одинаково направлена с полупрямыми b и c, то полупрямые b и c тоже одинаково направлены.
10. Какие полупрямые называются противоположно направленными?
11. Что значит: векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ одинаково направлены?
12. Что такое абсолютная величина вектора?
13. Какие векторы называются равными?
14. Докажите, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и только один.
15. Докажите, что равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. И обратно, одинаково направленные векторы, равные по абсолютной величине, равны.
16. Что такое координаты вектора?
17. Докажите, что равные векторы имеют соответственно равные координаты, а векторы с соответственно равными координатами равны.
18. Дайте определение сложения векторов.
19. Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$
$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$
20. Докажите, что для любых трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$
$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.$$
21. Докажите векторное равенство $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.
22. Докажите, что для получения суммы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ надо от конца вектора $\bar{a}$ отложить вектор $\bar{b}'$, равный $\bar{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом

вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}'$, будет равен $\bar{a} + \bar{b}$.

23. Дайте определение разности векторов.
24. Дайте определение умножения вектора на число.
25. Докажите, что абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda||\bar{a}|$, направление вектора $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a} \neq \bar{0}$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$.
26. Какие векторы называются коллинеарными?
27. Докажите, что векторы $(\overline{a_1, a_2})$ и $(\overline{b_1, b_2})$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.
28. Какой вектор называется единичным?
29. Докажите, что любой вектор $\bar{a}$ (a_1, a_2) допускает представление $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — единичные векторы координатных осей.
30. Дайте определение скалярного произведения векторов.
31. Докажите, что для любых трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$
$$(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}.$$
32. Как определяется угол между векторами?
33. Чему равен угол между одинаково направленными векторами?
34. Докажите, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.
35. Докажите, что если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. И обратно, если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Параллельный перенос задается формулами $x' = x + 1$, $y' = y - 1$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки (0, 0), (1, 0), (0, 2)?
2. Найдите величины a и b в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, если известно, что: 1) точка (1, 2) переходит в точку (3, 4); 2) точка (2, —3) — в точку (—1, 5); 3) точка (—1, —3) — в точку (0, —2).
3. При параллельном переносе точка (1, 1) переходит в точку (—1, 0). В какую точку переходит начало координат?
4. Существует ли параллельный перенос, при котором: 1) точка (1, 2) переходит в точку (3, 4), а точка (0, 1) — в точку (—1, 0); 2) точка (2, —1) переходит в точку (1, 0), а точка (—1, 3) — в точку (0, 4)?

5. AB и CD — параллельные прямые. Точки A и D лежат по одну сторону от секущей BC. Докажите, что лучи BA и CD одинаково направлены.
6. Докажите, что в задаче 5 лучи BA и CD противоположно направлены, если точки A и D лежат по разные стороны от секущей BC.
7. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Среди лучей AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA назовите пары одинаково направленных и противоположно направленных лучей.
8. На прямой даны три точки: A, B, C, причем точка B лежит между A и C. Среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ назовите одинаково направленные и противоположно направленные.
9. $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.
10. Докажите, что для векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ имеет место неравенство $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.
11. Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет место неравенство $|\bar{a} + \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$.
12. Даны точки $A\ (0, 1)$, $B\ (1, 0)$, $C\ (1, 2)$, $D\ (2, 1)$. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.
13. Даны три точки: $A\ (1, 1)$, $B\ (-1, 0)$, $C(0, 1)$. Найдите такую точку $D\ (x, y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны.
14. Абсолютная величина вектора $\bar{a}\ (5, m)$ равна 13. Найдите m.
15. Абсолютная величина вектора $\bar{b}\ (n, 24)$ равна 25. Найдите n.
16. $ABCD$ — параллелограмм. Докажите векторное равенство $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.
17. Найдите сумму векторов: 1) $\bar{a}\ (1, -2)$ и $\bar{b}\ (2, -3)$; 2) $\bar{a}\ (-3, 4)$ и $\bar{b}\ (2, -3)$; 3) $\bar{a}\ (3, 1)$ и $\bar{b}\ (-2, -1)$; 4) $\bar{a}\ (-5, 4)$ и $\bar{b}\ (2, -2)$; 5) $\bar{a}\ (-1, 1)$ и $\bar{b}\ (2, 4)$.
18. Найдите вектор $\bar{a} - \bar{b}$, если: 1) $\bar{a}\ (1,4)$, $\bar{b}\ (1, 3)$; 2) $\bar{a}\ (-3, 2)$, $\bar{b}\ (2, -1)$; 3) $\bar{a}\ (5, 3)$, $\bar{b}\ (4, 4)$; 4) $\bar{a}\ (3, 3)$, $\bar{b}\ (4, 2)$; 5) $\bar{a}\ (1, 5)$, $\bar{b}\ (2, 7)$.
19. Даны векторы с общим началом: $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Докажите, что $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.
20. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a} + \bar{b}$, если: 1) $\bar{a}\ (1, -4)$; $\bar{b}\ (-4, 8)$; 2) $\bar{a}\ (2, 5)$, $\bar{b}\ (4, 3)$; 3) $\bar{a}\ (10, 7)$, $\bar{b}\ (2, -2)$.
21. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a} - \bar{b}$, если: 1) $\bar{a}\ (1, -4)$, $\bar{b}\ (-4, 8)$; 2) $\bar{a}\ (-2, 7)$, $\bar{b}\ (4, -1)$;

3) $\bar{a}\,(15,\ 0)$, $\bar{b}\,(0,\ -8)$.

22. Даны различные точки: $A\,(x_1,\ y_1)$ и $B\,(x_2,\ y_2)$. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположно направлены.

23. Докажите, что векторы $\bar{a}\,(1,\ 2)$ и $\bar{b}\,(0{,}5;\ 1)$ одинаково направлены, а векторы $\bar{c}\,(-1,\ 2)$ и $\bar{d}\,(0{,}5;\ -1)$ противоположно направлены.

24. Дан вектор $\bar{a}\,(3,\ 4)$. Найдите вектор $\bar{b}\,(b_1,\ b_2)$, имеющий в два раза бóльшую длину и направленный с вектором $\bar{a}$: 1) одинаково; 2) противоположно.

25. Даны векторы $\bar{a}\,(3,\ 2)$ и $\bar{b}\,(0,\ -1)$. Найдите вектор: 1) $-2\bar{a}+4\bar{b}$; 2) $3\bar{a}-\bar{b}$; 3) $4\bar{a}+\bar{b}$.

26. Даны векторы $\bar{a}\,(3,\ 2)$ и $\bar{b}\,(0,\ -1)$. Найдите абсолютную величину вектора: 1) $-2\bar{a}+4\bar{b}$; 2) $4\bar{a}+3\bar{b}$; 3) $5\bar{a}+10\bar{b}$.

27. Найдите абсолютную величину вектора $3\bar{a}$, если: 1) $\bar{a}\,(3,\ 4)$; 2) $\bar{a}\,(-5,\ 12)$; 3) $\bar{a}\,(-6,\ -8)$.

28. Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна 5. Найдите λ, если: 1) $\bar{a}\,(-6,\ 8)$; 2) $\bar{a}\,(3,\ -4)$; 3) $\bar{a}\,(5,\ 12)$.

29. Даны векторы $\bar{a}\,(2,\ -4)$, $\bar{b}\,(1,\ 2)$, $\bar{c}\,(1,\ -2)$, $\bar{d}\,(-2,\ -4)$. Укажите пары коллинеарных векторов.

30. Какие векторы задачи 29 одинаково направлены, а какие — противоположно направлены? Какие из этих векторов имеют равные абсолютные величины?

31. Известно, что векторы $\bar{a}\,(1,\ -1)$ и $\bar{b}\,(-2,\ m)$ коллинеарны. Найдите, чему равно m.

32. При каком значении n векторы $\bar{a}\,(n,\ 1)$, $\bar{b}\,(4,\ n)$ коллинеарны и одинаково направлены?

33. Среди векторов $\bar{a}\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$, $\bar{b}\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $\bar{c}\,(0,\ -1)$, $\bar{d}\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$ найдите единичные и укажите, какие из них коллинеарны.

34. Найдите единичный вектор, коллинеарный вектору $\bar{a}\,(6,\ 8)$, одинаково с ним направленный.

35. Даны векторы $\bar{a}\,(1,\ 0)$, $\bar{b}\,(1,\ 1)$ и $\bar{c}\,(-1,\ 0)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы имело место векторное равенство $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$.

36. Точки M и N являются серединами отрезков AB и CD соответственно. Докажите векторное равенство $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$.

37. $\bar{e}_1\,(1,\ 0)$ и $\bar{e}_2\,(0,\ 1)$ — координатные векторы. Чему равны координаты вектора $2\bar{e}_1-3\bar{e}_2$?

38. Чему равны λ и μ в представлении вектора $\bar{a}(-5, 4)$:
$$\bar{a} = \lambda \bar{e}_1 + \mu \bar{e}_2?$$

39. Докажите, что для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $(\bar{a}\bar{b})^2 \leqslant \bar{a}^2\bar{b}^2$.

40. Найдите угол между векторами $\bar{a}(1, 2)$, $\bar{b}\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

41. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a} + \bar{b}$, если известно, что абсолютные величины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны 1, а угол между ними 60°.

42. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{a} + \bar{b}$ предыдущей задачи.

43. Даны вершины треугольника $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 5)$. Найдите косинусы углов треугольника.

44. Найдите углы треугольника с вершинами $A(0, \sqrt{3})$, $B(2, \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

45. Докажите, что векторы $\bar{a}(m, n)$ и $\bar{b}(-n, m)$ перпендикулярны или равны нулю.

46. Даны векторы $\bar{a}(3, 4)$ и $\bar{b}(m, 2)$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

47. Даны векторы $\bar{a}(1, 0)$ и $\bar{b}(1, 1)$. Найдите такое число λ, чтобы вектор $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ был перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

48. При каком значении λ вектор $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ в задаче 47 перпендикулярен вектору $\bar{b}$?

49. Докажите, что если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — единичные неколлинеарные векторы, то векторы $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ отличны от нуля и перпендикулярны.

50. Единичные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 60°. Докажите, что вектор $2\bar{b} - \bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

51. Векторы $\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{a} - \bar{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

52. Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

53. 1) Даны три точки: O, A, B. Точка X делит отрезок AB в отношении $\lambda : \mu$, считая от точки A. Выразите вектор $\overline{OX}$ через векторы $\overline{OA} = \bar{a}$ и $\overline{OB} = \bar{b}$. 2) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении 2 : 1, считая от соответствующих вершин.

54. Даны четыре точки: $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(0, 4)$, $D(-1, 2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

55. Даны четыре точки: $A(0, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 2)$, $D(1, 1)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

§ 11. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Теорема 11.1 (теорема косинусов). ***Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.***

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 175). Докажем, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Имеем векторное равенство $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Отсюда $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Возводя это равенство скалярно в квадрат, получим:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}.$$

Отсюда

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2|\overline{AB}||\overline{AC}| \cos A.$$

Теорема доказана.

Заметим, что $|\overline{AC}| \cos A$ равно по абсолютной величине проекции AD стороны AC на сторону AB (рис. 175, *а*) или ее продолжение (рис. 175, *б*). Знак $|\overline{AC}| \cos A$ зависит от угла A: «+», если угол A острый, «—», если угол A тупой. Отсюда получается следствие: ***квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «±» удвоенное произведение одной из них на проекцию другой.*** Знак «+» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «—», когда угол острый.

Задача (1). Даны стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

Решение. Имеем: $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot AD$ (рис. 176).

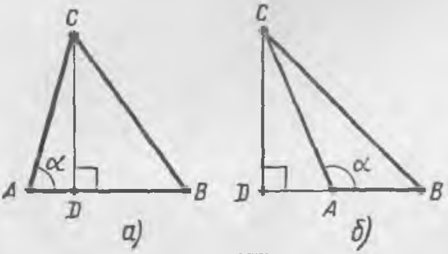


Рис. 175

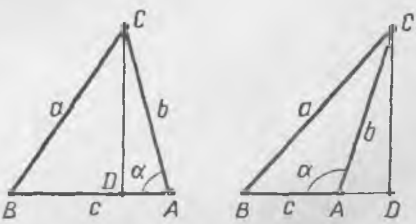


Рис. 176

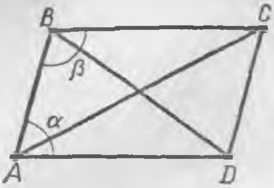


Рис. 177

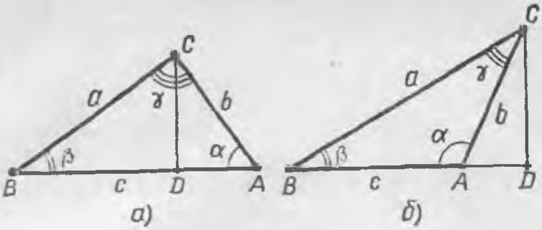


Рис. 178

Отсюда $AD = \pm \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$. По теореме Пифагора

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$

Из теоремы косинусов следует, что *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.* Действительно, пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 177). Применим теорему косинусов к треугольникам ABC и ABD, получим:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \beta,$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \alpha.$$

Складывая эти равенства и замечая, что $\cos \beta = -\cos \alpha$, $AB = CD$, получим:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Теорема 11.2 (теорема синусов). *Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.*

Доказательство. Пусть ABC — треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами α, β, γ (рис. 178). Докажем, что

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Опустим из вершины C высоту CD. Из прямоугольного треугольника ACD, если угол α острый, получаем: $CD = b \sin \alpha$ (рис. 178, a). Если угол α тупой, то $CD =$

$= b\sin(180° - \alpha) = b\sin\alpha$ (рис. 178, *б*). Аналогично из треугольника BCD получаем: $CD = a\sin\beta$. Итак, $a\sin\beta = b\sin\alpha$. Отсюда

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Для доказательства надо провести высоту треугольника из вершины A. Теорема доказана.

З а д а ч а (9). Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Р е ш е н и е. Пусть ABC—данный треугольник и BD — его биссектриса (рис. 179). Докажем, что $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$.

Применим теорему синусов к треугольникам ABD и CBD:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha}, \quad \frac{CD}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{BC}{\sin\alpha}.$$

Если первое равенство разделить на второе, то получим:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}.$$

Что и требовалось доказать.

Из теоремы синусов следует, что если в треугольнике со сторонами a, b и противолежащими им углами α, β будет $\alpha > \beta$, то $a > b$. И обратно, если $a > b$, то $\alpha > \beta$. Короче говоря, ***в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.***

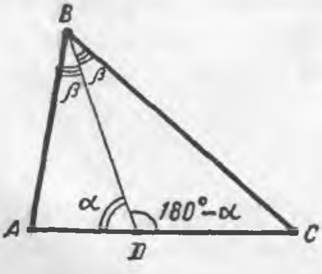


Рис. 179

Действительно, если углы α и β острые (рис. 180, *а*), то при $\alpha > \beta$ будет $\sin\alpha > \sin\beta$. А так как

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b},$$

то $a > b$. Если угол α тупой (оба угла не могут быть тупыми), то угол $180° - \alpha$ острый (рис. 180, *б*). Причем $180° - \alpha$ больше β, как внешний угол треугольника, не смежный с β. Поэтому $\sin \alpha = \sin (180° - \alpha) > \sin \beta$. И мы снова заключаем, что $a > b$. Обратное утверждение доказывается от противного.

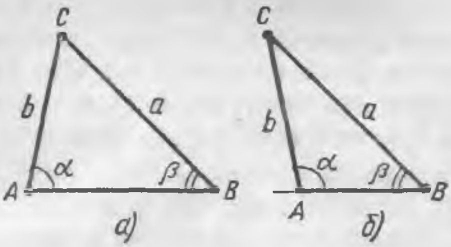


Рис. 180

З а д а ч а (21). Докажите, что в теореме синусов каждое из трех отношений: $\frac{\sin \alpha}{a}$, $\frac{\sin \beta}{b}$, $\frac{\sin \gamma}{c}$ — равно $\frac{1}{2R}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

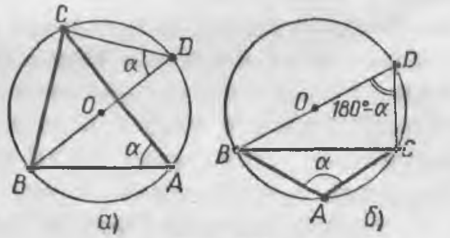


Рис. 181

Р е ш е н и е. Проведем диаметр BD (рис. 181). По свойству углов, вписанных в окружность, угол при вершине D прямоугольного треугольника BCD равен либо α, если точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC (рис. 181, *а*), либо $180° - \alpha$, если они лежат по разные стороны от прямой BC (рис. 181, *б*). В первом случае $BC = BD \sin \alpha$, во втором $BC = BD \sin (180° - \alpha)$. Так как $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$, то в любом случае $a = 2R \sin \alpha$. Следовательно, $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{1}{2R}$. Что и требовалось доказать.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решение треугольников состоит в нахождении неизвестных сторон и углов треугольника по известным его углам и сторонам. Будем обозначать стороны треугольника через a, b, c, а противолежащие им углы через α, β, γ.

З а д а ч а I. *Даны сторона и два угла треугольника. Найти третий угол и остальные две стороны.*

Способ решения. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то третий угол выражается через заданные углы. Имея сторону и все три угла, по теореме синусов находим две остальные стороны. Задача всегда имеет решение, и притом единственное. Конечно, сумма двух данных углов должна быть меньше 180°. Единственность решения следует из второго признака равенства треугольников.

Задача II. *Даны две стороны, например a и b, и угол γ между ними. Найти остальные два угла и третью сторону.*

Способ решения. По теореме косинусов находим сторону c. Теперь, имея три стороны, по теореме косинусов можно найти косинусы остальных углов и сами углы. Проще, однако, воспользоваться теоремой синусов и найти синусы неизвестных углов. Но при этом надо иметь в виду, что для данного значения синуса получается два угла. Поэтому из полученных углов надо взять те, которые удовлетворяют известным соотношениям: сумма углов треугольника равна 180°, против большей стороны лежит больший угол. Задача всегда имеет решение, и притом единственное. Единственность решения следует из первого признака равенства треугольников.

Задача III. *Даны две стороны, например a и b, и угол, противолежащий одной из них, например α. Найти остальные два угла и третью сторону.*

Способ решения. По теореме синусов находим $\sin\beta$. По $\sin\beta$ находим отвечающие ему углы β_1 и β_2. Выбираем из них один или оба, имея в виду, что против большей из сторон a и b лежит больший угол. Зная углы α и β, находим угол $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, а затем находим сторону c по теореме синусов. Эта задача в отличие от двух предыдущих может не иметь решения, иметь одно решение или два решения.

Задача IV. *Даны три стороны треугольника. Найти его углы.*

Способ решения. По теореме косинусов находим один из углов. А затем поступаем, как во второй задаче. Эта задача имеет решение, если большая из сторон меньше суммы двух других. Единственность решения следует из третьего признака равенства треугольников.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сформулируйте и докажите теорему косинусов.
2. Докажите, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «$\pm$» удвоенное произведение одной из этих сторон на проекцию другой. От чего зависит знак «$+$» или «$-$»?
3. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.
4. Докажите теорему синусов.
5. Докажите, что в любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол и против большего угла лежит большая сторона.
6. Даны сторона и два угла треугольника. Как найти третий угол и две остальные его стороны?
7. Даны две стороны треугольника и угол между ними. Как найти остальные два угла и третью сторону?
8. Даны две стороны и угол, противолежащий одной из них. Как найти остальные два угла и третью сторону?
9. Даны три стороны треугольника. Как найти его углы?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.
2. Даны стороны треугольника a, b, c. Найдите медианы m_a, m_b, m_c, проведенные к этим сторонам.
3. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними α. Найдите стороны параллелограмма.
4. Даны стороны параллелограмма a и b и один из углов α. Найдите диагонали параллелограмма.
5. a, b, c — стороны треугольника. Докажите теорему, обратную теореме Пифагора: если $a^2 + b^2 = c^2$, то треугольник прямоугольный с прямым углом, противолежащим стороне c.
6. a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что если $a^2 + b^2 > c^2$, то угол, противолежащий стороне c, острый. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то угол, противолежащий стороне c, тупой.
7. У треугольника две стороны равны 20 м и 21 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.
8. Стороны треугольника 13 м, 14 м, 15 м. Найдите косинусы углов треугольника.
9. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.
10. Из вершины C треугольника ABC проведена биссектриса CD. Сторона AC больше стороны BC. Какой из отрезков больше: AD или BD?

11. Дан треугольник ABC. CD — его биссектриса, проведенная к стороне AB. Докажите, что если угол CAB больше угла CBA, то AD меньше BD.

12. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. Какая из сторон треугольника наибольшая, какая — наименьшая?

13. У треугольника ABC стороны $AB = 5{,}1$ м, $BC = 6{,}2$ м, $AC = 7{,}3$ м. Какой из углов треугольника наибольший, какой — наименьший?

14. Что больше: основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если прилежащий к основанию угол больше 60°?

15. У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, то $BX < AB$.

16. У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, а точка Y — на стороне BC, то $XY < AB$.

17. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что отрезок CD меньше по крайней мере одной из сторон: AC или BC.

18. Дан треугольник ABC. CD — медиана, проведенная к стороне AB. Докажите, что если $AC > BC$, то угол ACD меньше угла BCD.

19. Докажите, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведенных из той же вершины.

20. Как изменяется сторона AB треугольника ABC, если угол C возрастает, а стороны AC и BC остаются без изменений?

21. Докажите, что в теореме синусов каждое из трех отношений $\frac{\sin\alpha}{a}$, $\frac{\sin\beta}{b}$, $\frac{\sin\gamma}{c}$ равно $\frac{1}{2R}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

22. У треугольника две стороны равны 5 см и 6 см. Может ли угол, противолежащий стороне 5 см, быть тупым?

23. У треугольника ABC $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Может ли $\sin B = \frac{3}{4}$?

24. Объясните, как найти расстояние от точки A до недоступной точки B (рис. 182), зная расстояние AC и углы α и β.

25. Объясните, как найти высоту x здания (рис. 183) по углам α и β и расстоянию a.

26. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если:

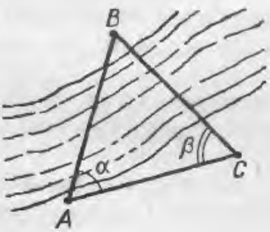


Рис. 182

1) $a = 5$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$;
2) $a = 20$, $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$;
3) $a = 35$, $\beta = 40°$, $\gamma = 120°$;
4) $b = 12$, $\alpha = 36°$, $\beta = 25°$;
5) $c = 14$, $\alpha = 64°$, $\beta = 48°$.

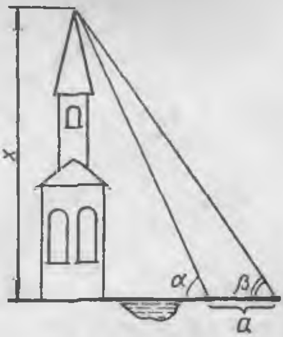


Рис. 183

27. Даны две стороны и угол, противолежащий третьей стороне. Найдите остальные два угла и третью сторону, если:
1) $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60°$;
2) $a = 7$, $b = 23$, $\gamma = 130°$;
3) $b = 9$, $c = 17$, $\alpha = 95°$;
4) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145°$;
5) $a = 32$, $c = 23$, $\beta = 152°$;
6) $a = 24$, $c = 18$, $\beta = 15°$.

28. У треугольника заданы две стороны a, b и угол α, противолежащий стороне a. Найдите остальные углы и сторону треугольника, если:
1) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;
2) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$;
3) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$;
4) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$;
5) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

29. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если:
1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;
2) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$;
3) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$;
4) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$;
5) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$;
6) $a = 55$, $b = 21$, $c = 38$.

30. Докажите, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна, есть окружность с центром в середине отрезка, соединяющего данные точки.

§ 12. МНОГОУГОЛЬНИКИ

ЛОМАНАЯ

Ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ называется фигура, которая состоит из точек A_1, A_2, ..., A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Точки A_1, A_2, ..., A_n называются *вершинами* ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — *звеньями* ломаной. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений. На рисунке 184, *а* показана простая

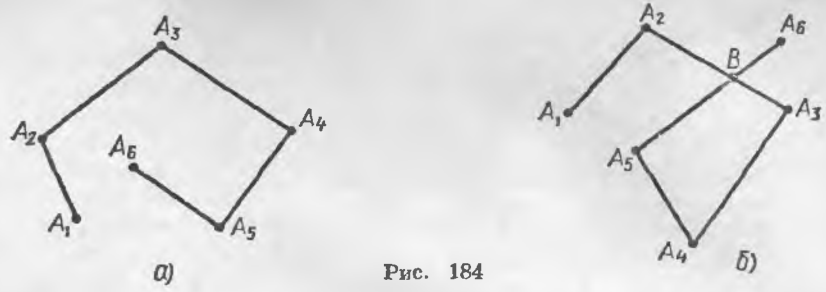


Рис. 184

ломаная, а на рисунке 184, *б* — ломаная с самопересечением (в точке B). *Длиной ломаной* называется сумма длин ее звеньев.

Теорема 12.1. ***Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.***

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ — данная ломаная. Заменим звенья ломаной A_1A_2 и A_2A_3 одним звеном A_1A_3. Получим ломаную $A_1A_3A_4 \ldots A_n$. По неравенству треугольника она имеет длину, не бо́льшую, чем исходная ломаная. Заменяя таким же способом звенья A_1A_3 и A_3A_4 звеном A_1A_4, переходим к ломаной $A_1A_4A_5 \ldots A_n$. И так далее. В конце концов мы придем к отрезку A_1A_n, соединяющему концы ломаной. Отсюда следует, что исходная ломаная имела длину, не меньшую длины отрезка A_1A_n. Теорема доказана.

Задача (1). Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками X и Y этих окружностей?

Решение. Для ломаной O_1XYO_2 по теореме 12.1 $O_1O_2 \leqslant O_1X + XY + YO_2$ (рис. 185). Значит, $d \leqslant R_1 + XY + R_2$. Отсюда $XY \geqslant d - R_1 - R_2$. Так как $AC = d - R_1 - R_2$, то наименьшее расстояние между точками окружностей равно $d - R_1 - R_2$.

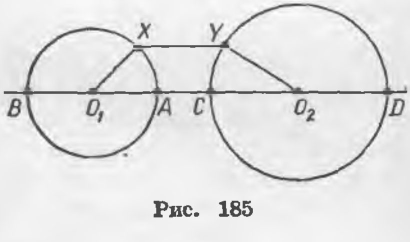


Рис. 185

Для ломаной XO_1O_2Y $XY \leqslant R_1 + d + R_2$. Так как $BD = d + R_1 + R_2$, то наибольшее расстояние между точками окружностей равно $d + R_1 + R_2$.

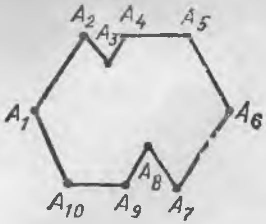


Рис. 186

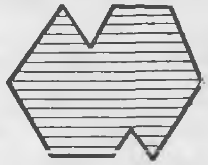


Рис. 187

ВЫПУКЛЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Ломаная называеся *замкнутой*, если у нее концы совпадают. Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником*, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой (рис. 186). Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника*, а звенья ломаной — *сторонами многоугольника*. Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника, называются *диагоналями*. Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами, называется n-угольником.

Плоским многоугольником или многоугольной областью называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником (рис. 187).

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости. На рисунке 188, *а* изображен выпуклый многоугольник, а на рисунке 188, *б* — невыпуклый. *Углом* выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине.

Теорема 12.2. ***Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.***

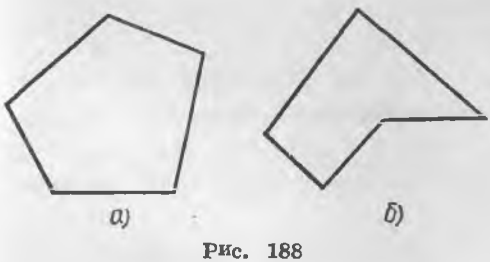


Рис. 188

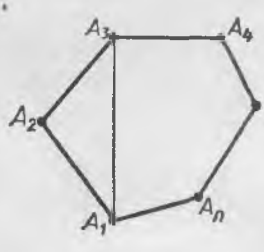


Рис. 189

Доказательство. Пусть P: $A_1A_2 \dots A_n$ — данный выпуклый многоугольник (рис. 189). Проведем диагональ A_1A_3. Получим треугольник $A_1A_2A_3$ и многоугольник с $n-1$ вершинами P_1: $A_1A_3 \dots A_n$. Углы при вершинах A_1 и A_3 многоугольника P равны сумме углов многоугольника P_1 и треугольника $A_1A_2A_3$ при этих вершинах. Отсюда следует, что сумма углов многоугольника P равна сумме углов многоугольника P_1 плюс сумма углов треугольника $A_1A_2A_3$, т. е. 180°. Далее таким же способом заключаем, что сумма углов многоугольника P_1 равна сумме углов многоугольника P_2: $A_1A_4 \dots A_n$ плюс 180°. А значит, сумма углов многоугольника P равна сумме углов многоугольника P_2 плюс $180° \cdot 2$.

Продолжая таким же образом, на $(n-3)$-м шаге мы придем к треугольнику $A_1A_{n-1}A_n$. А сумма его углов равна 180°. В итоге сумма углов многоугольника P равна $180°(n-3) + 180° = 180°(n-2)$. Теорема доказана.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине.

Задача (8). Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Решение. Сумма внутреннего угла многоугольника и смежного с ним внешнего равна 180°. Поэтому сумма всех внутренних и внешних углов равна $180° \cdot n$. Но сумма всех внутренних углов по теореме 12.2 равна $180° \cdot (n-2)$. Значит, сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна $180°\, n - 180°(n-2) = 360°$.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны.

Многоугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины лежат на некоторой окружности. Многоугольник называется *описанным* около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности.

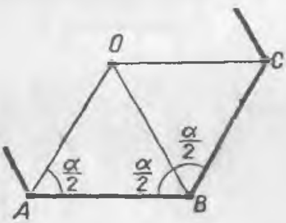


Рис. 190

Теорема 12.3. ***Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.***

Доказательство. Пусть A и B — две соседние вершины многоугольника (рис. 190). Проведем биссектрисы углов многоугольника из вершин A и B. Пусть O — точка их пересечения. Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB и углами при основании, равными $\frac{\alpha}{2}$, где α — угол многоугольника. Соединим точку O с вершиной C, соседней с B. Треугольники ABO и CBO равны по первому признаку равенства треугольников. У них сторона OB общая, стороны AB и BC равны как стороны многоугольника, а углы при вершине B равны $\frac{\alpha}{2}$. Из равенства треугольников следует, что треугольник OBC равнобедренный с углом при вершине C, равным $\frac{\alpha}{2}$. А значит, CO есть биссектриса угла C многоугольника.

Теперь соединяем точку O с вершиной D, соседней с C, и доказываем, что треугольник COD равнобедренный и DO — биссектриса угла D многоугольника. И так далее. В итоге получается, что каждый треугольник, у которого одной стороной является сторона многоугольника, а противолежащей вершиной — точка O, является равнобедренным. Все эти треугольники имеют равные боковые стороны. Отсюда следует, что все вершины многоугольника находятся на окружности с центром O и радиусом, равным боковым сторонам треугольников, а все стороны многоугольника касаются окружности с центром O и радиусом, равным высотам треугольников, проведенным из вершины O. Теорема доказана.

Найдем радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности для правильного многоугольника со стороной a и числом сторон n (рис. 191). Имеем:

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{(n-2)\,180^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n};$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \quad r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$

Для правильного треугольника $n = 3$, $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$,

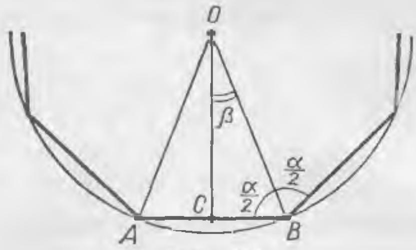


Рис. 191

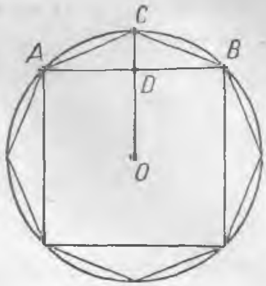


Рис. 192

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}};\quad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Для правильного четырехугольника (квадрата) $n = 4$, $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}};\quad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,45^\circ} = \frac{a}{2}.$$

Для правильного шестиугольника $n = 6$, $\frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a;\quad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Задача (23). Докажите, что сторона правильного восьмиугольника вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.

Решение. Пусть AB — сторона вписанного квадрата, AC — сторона восьмиугольника (рис. 192). Имеем: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$, $AD = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $CD = OC - OD = R - \frac{R\sqrt{2}}{2}$, и поэтому

$$a_8 = AC\sqrt{\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(R - R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

Наглядное представление о длине окружности получается следующим образом. Представим себе нить в форме окружности. Разрежем ее и растянем за концы. Длина полученного отрезка и есть длина окружности. Как найти длину окружности, зная ее радиус? Из наглядных соображений ясно, что длина окружности сколь угодно мало отличается от периметра вписанного в нее выпуклого многоугольника с достаточно малыми сторонами. Исходя из этого, докажем некоторые свойства длины окружности.

Теорема 12.4. *Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей.*

Доказательство. Возьмем две произвольные окружности. Пусть R_1 и R_2 — их радиусы, а l_1 и l_2 — длины окружностей. Допустим, что утверждение теоремы неверно и $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$, например

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \qquad (*)$$

Впишем в наши окружности правильные выпуклые многоугольники с большим числом сторон n. Если n очень велико, то длины наших окружностей будут очень мало отличаться от периметров p_1 и p_2 вписанных многоугольников. Поэтому неравенство (*) не нарушится, если в нем заменить l_1 на p_1, а l_2 на p_2:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \qquad (**)$$

Выразим периметры p_1 и p_2 через радиусы окружностей. Из формулы $R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$ для радиуса окружности, описанной около правильного многоугольника, следует, что стороны вписанных многоугольников равны $2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}$, $2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n}$. Поэтому периметрами многоугольников будут $p_1 = 2R_1 n \sin \frac{180^\circ}{n}$, $p_2 = 2R_2 n \sin \frac{180^\circ}{n}$. Отсюда $\frac{p_1}{2R_1} = n \sin \frac{180^\circ}{n}$, $\frac{p_2}{2R_2} = n \sin \frac{180^\circ}{n}$, т. е. $\frac{p_1}{2R_1} = \frac{p_2}{2R_2}$. А это противоречит неравенству (**). Теорема доказана.

Отношение длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»):

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

Число π — иррациональное. Приближенное значение

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

Таким образом, *длина окружности вычисляется по формуле*

$$\boldsymbol{l = 2\pi R}.$$

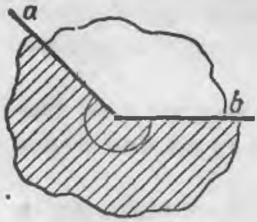


Рис. 193

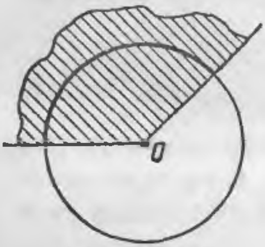


Рис. 194

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ И ДУГА ОКРУЖНОСТИ

Плоским углом называется часть плоскости, ограниченная двумя различными лучами, исходящими из одной точки. Эти лучи называются сторонами угла. Существует два плоских угла с данными сторонами. Они называются *дополнительными*. На рисунке 193 заштрихован один из плоских углов со сторонами a и b.

Если плоский угол является частью полуплоскости, то его градусной мерой называется градусная мера обычного угла с теми же сторонами. Если плоский угол содержит полуплоскость, то его градусная мера равна $360° - \alpha$, где α — градусная мера дополнительного плоского угла.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой окружности*, соответствующей этому центральному углу (рис. 194). Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Найдем длину дуги окружности, отвечающей центральному углу в $n°$. Развернутому углу соответствует длина полуокружности πR. Следовательно, углу в $1°$ соответствует дуга $\frac{\pi R}{180}$, а углу в $n°$ соответствует дуга

$$l = \frac{\pi R}{180} n.$$

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности. Из формулы для длины дуги окружности следует, что

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} n,$$

т. е. *радианная мера угла получается из градусной умножением на* $\frac{\pi}{180°}$. В частности, радианная мера угла $180°$ равна π, радианная мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$.

Единицей радианной меры углов является *радиан*. Угол в один радиан — это угол, у которого длина дуги равна радиусу. Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что такое ломаная, длина ломаной?
2. Докажите, что длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.
3. Что такое многоугольник, выпуклый многоугольник?
4. Что такое угол выпуклого многоугольника при данной вершине?
5. Что такое внешний угол выпуклого многоугольника?
6. Выведите формулу для суммы углов выпуклого многоугольника.
7. Докажите, что правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.
8. Выведите формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника.
9. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей для правильного треугольника, квадрата, шестиугольника.
10. Докажите, что отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для всех окружностей.
11. По какой формуле вычисляется длина окружности?
12. Что такое плоский угол?
13. Что такое центральный угол?
14. Что такое дуга окружности, отвечающая данному центральному углу?
15. По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?
16. Что такое радианная мера угла?
17. Чему равны радианные меры углов 180° и 90°?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстоянием между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками Y и X этих окружностей?
2. Решите задачу 1 при условии, что $d < R_1 - R_2$.
3. Докажите, что если вершины ломаной не лежат на одной прямой, то длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы.

4. Докажите, что у замкнутой ломаной расстояние между любыми двумя вершинами не больше половины длины ломаной.
5. Докажите, что у замкнутой ломаной длина каждого звена не больше суммы длин остальных звеньев.
6. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м? Объясните ответ.
7. Докажите, что если концы ломаной лежат по разные стороны от данной прямой, то она пересекает эту прямую.
8. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?
9. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.
10. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен: 1) $135°$, 2) $150°$?
11. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из внешних его углов равен: 1) $36°$, 2) $24°$?
12. Докажите, что взятые через одну вершины правильного $2n$-угольника являются вершинами правильного n-угольника.
13. Докажите, что середины сторон правильного n-угольника являются вершинами другого правильного n-угольника.
14. Докажите, что правильные n-угольники с одинаковыми сторонами равны, т. е. совмещаются движением.
15. Докажите, что правильные n-угольники подобны, т. е. переводятся друг в друга преобразованием подобия.
16. Сколько диагоналей у n-угольника?
17. Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного треугольника. Докажите.
18. У правильного треугольника радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности. Докажите.
19. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна a. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.
20. В окружность, радиус которой 4 дм, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.
21. Конец валика диаметром в 4 см опилен под квадрат. Определите наибольший размер, который может иметь сторона квадрата.
22. Конец винта газовой задвижки имеет правильную трехгранную форму. Какой наибольший размер может

иметь каждая грань, если цилиндрическая часть винта имеет диаметр 2 см?

23. Докажите, что сторона правильного 8-угольника вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.

24. Докажите, что сторона правильного 12-угольника вычисляется по формуле $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, где R — радиус описанной окружности.

25. Найдите стороны правильного пятиугольника и правильного 10-угольника, вписанных в окружность радиуса R.

26. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус описанной окружности R. Найдите радиус вписанной окружности.

27. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус вписанной окружности r. Найдите радиус описанной окружности.

28. Выразите сторону b правильного описанного многоугольника через радиус R окружности и сторону a правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон.

29. Выразите сторону a правильного вписанного многоугольника через радиус R окружности и сторону b правильного описанного многоугольника с тем же числом сторон.

30. Впишите в окружность правильный 12-угольник.

31. Опишите около окружности правильный 8-угольник.

32. Вычислите длину окружности, если радиус равен: 1) 10 м; 2) 15 м.

33. На сколько изменится длина окружности, если радиус изменится на 1 мм?

34. Найдите отношение периметра правильного вписанного 8-угольника к диаметру и сравните его с приближенным значением π.

35. Решите задачу 34 для правильного 12-угольника.

36. Найдите радиус земного шара, исходя из того, что 1 метр составляет одну 40-миллионную долю длины экватора.

37. На сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 см?

38. n равных окружностей, расположенных внутри окружности радиуса R, касаются между собой и данной окружности. Найдите радиус этих окружностей, если число их n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

39. Решите предыдущую задачу, если окружности расположены вне данной окружности.

40. Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Найдите скорость точки на окружности шкива.

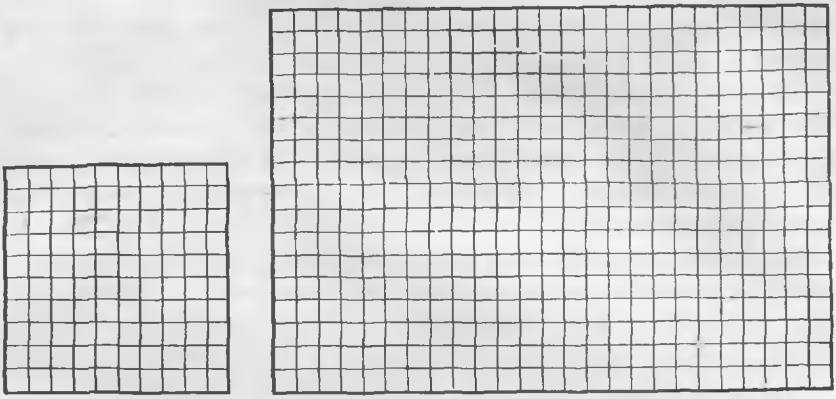


Рис. 196

площадь большого квадрата равна сумме площадей малых квадратов. Так как площадь большого квадрата равна единице, а число малых квадратов равно 10^{2n}, то площадь малого квадрата $\frac{1}{10^{2n}}$.

Так как числа $a : \frac{1}{10^n} = a \cdot 10^n$ и $b : \frac{1}{10^n} = b \cdot 10^n$ целые, то стороны прямоугольника можно разбить на целое число частей, равных $\frac{1}{10^n}$. На стороне a их будет $a \cdot 10^n$, а на стороне b их будет $b \cdot 10^n$. Проведем через точки деления сторон прямые, параллельные сторонам прямоугольника. При этом мы получим разбиение прямоугольника на малые квадраты со стороной $\frac{1}{10^n}$. Число их будет $a \cdot 10^n \times$ $\times b \cdot 10^n$. Площадь прямоугольника равна сумме площадей содержащихся в нем малых квадратов. Так как площадь малого квадрата равна $\frac{1}{10^{2n}}$, а число их равно $ab \cdot 10^{2n}$, то площадь прямоугольника равна $ab \cdot 10^{2n} \cdot \frac{1}{10^{2n}} = ab$.

Пусть теперь хотя бы одна из сторон прямоугольника a и b выражается бесконечной десятичной дробью. Обозначим через a_1 и a_2 приближенные значения числа a с недостатком и с избытком с точностью до n десятичных знаков. Приближенные значения числа b с той же точностью обозначим через b_1 и b_2. Прямоугольник со сторонами a_1 и b_1 имеет площадь меньшую, чем данный, так как его можно поместить внутрь данного. Прямоугольник со сторонами a_2 и b_2 имеет площадь большую, чем данный, так как данный прямоугольник можно поместить внутрь него. По доказанному площадь прямоугольника со сторонами a_1 и b_1 равна a_1b_1, а площадь прямоугольника со сторонами a_2 и b_2 равна a_2b_2. Таким образом, площадь S нашего прямоугольника заключена между a_1b_1 и a_2b_2. Так как a_1b_1 и a_2b_2 дают приближенное значение ab с любой наперед заданной точностью, если n достаточно велико, то $S = ab$. Итак, ***площадь прямоугольника вычисляется по формуле***

$$S = ab.$$

ПЛОЩАДИ ПРОСТЫХ ФИГУР

Найдем площадь параллелограмма. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 197). Если он не является прямоугольником, то один из его углов, A или B, острый. Пусть для определенности угол A острый, как изображено на рисунке 197. Опустим перпендикуляр AE из вершины A на прямую CD. Площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника ADE.

Опустим перпендикуляр BF из вершины B на прямую CD. Тогда площадь трапеции $ABCE$ равна сумме площадей прямоугольника $ABFE$ и треугольника BCF. Прямоугольные треугольники ADE и BCF равны, а значит, имеют равные площади. Отсюда следует, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $ABFE$, т. е. равна $AB \cdot BF$. Отрезок BF называется *высотой* параллелограмма, соответствующей сторонам AB и CD.

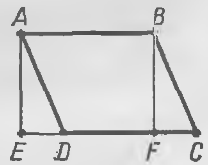


Рис. 197

Итак, ***площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.***

Найдем площадь треугольника. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 198). Дополним этот треугольник до параллелограмма $ABCD$, как указано на рисунке. Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников ABC и CDA. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади тре-

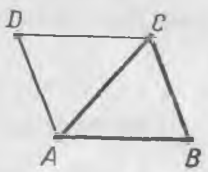


Рис. 198

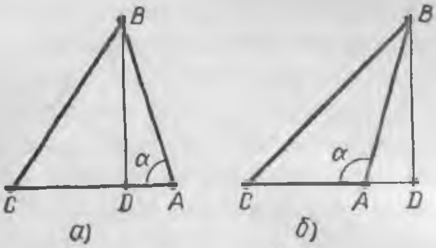


Рис. 199

угольника ABC. Высота параллелограмма, соответствующая стороне AB, равна высоте треугольника ABC, проведенной к стороне AB.

Отсюда следует, что *площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.*

З а д а ч а (16). Докажите справедливость формулы для площади треугольника ABC: $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A$.

Р е ш е н и е. Проведем в треугольнике ABC высоту BD (рис. 199). Имеем: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. Из прямоугольного треугольника ABD $BD = AB \cdot \sin\alpha$, если угол α острый (рис. 199, *а*), $BD = AB\sin(180° - \alpha)$, если угол α тупой (рис. 199, *б*). Так как $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то в любом случае $BD = AB\sin\alpha$. Следовательно, площадь треугольника $S = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin A$.

З а д а ч а (37). Выведите формулу Герона[1] для площади треугольника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, а p — полупериметр.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

где γ — угол треугольника, противолежащий стороне c. По теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

[1] Герон Александрийский — древнегреческий ученый, живший в I в. н. э.

Отсюда
$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$
$$= \left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$
$$= \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Замечая, что $(a+b+c)=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $c-a+b=2p-2a$, получаем:
$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Таким образом,
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Найдем площадь трапеции. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 200). Диагональ трапеции AC разбивает ее на два треугольника: ABC и CDA. Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB\cdot CE$, площадь треугольника ACD равна $\frac{1}{2}DC\cdot AF$. Высоты CE и AF этих треугольников равны расстоянию между параллельными прямыми AB и CD. Это расстояние называется *высотой* трапеции.

Следовательно, ***площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.***

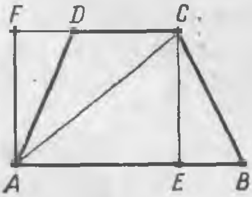


Рис. 200

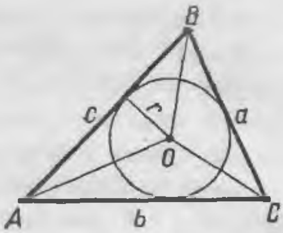


Рис. 201

З а д а ч а (38). Выведите следующие формулы для радиусов описанной (R) и вписанной (r) окружностей треугольника:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

Р е ш е н и е. Начнем с формулы для R. Как мы знаем, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, где α — угол, противолежащий стороне a треугольника (задача 21 § 11).

Умножая числитель и знаменатель правой части на bc и замечая, что $\frac{1}{2}bc\sin\alpha = S$, получим: $R = \frac{abc}{4S}$.

Выведем формулу для r (рис. 201). Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников OAB, OBC и OCA:

$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br.$$

Отсюда

$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

ПЛОЩАДИ ПОДОБНЫХ ФИГУР

Пусть F_1 и F_2 — две подобные простые фигуры. Выясним, как относятся площади этих фигур. Так как фигуры подобны, то существует преобразование подобия, при котором фигура F_1 переходит в фигуру F_2.

Разобьем фигуру F_1 на треугольники $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$, ... Преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в F_2, переводит эти треугольники в треугольники $\triangle_1''$, $\triangle_2''$, $\triangle_3''$, ... разбиения фигуры F_2. Площадь фигуры F_1 равна сумме площадей треугольников $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, ..., а площадь фигуры F_2 равна сумме площадей треугольников $\triangle_1''$, $\triangle_2''$, ...

Если коэффициент подобия равен k, то размеры треугольника $\triangle_n''$ в k раз больше соответствующих размеров треугольника $\triangle_n'$. В частности, стороны и высоты треугольника $\triangle_n''$

в k раз больше, чем соответствующие стороны и высоты треугольника $\triangle_n'$. Отсюда следует, что $S(\triangle_n'') = k^2 S(\triangle_n')$. Складывая эти равенства почленно, получим:

$$S(F_2) = k^2 S(F_1).$$

Коэффициент подобия k равен отношению соответствующих линейных размеров фигур F_2 и F_1. Поэтому ***площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.***

ПЛОЩАДЬ КРУГА

Кругом называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется *центром круга*, а данное расстояние — *радиусом круга*. Границей круга является окружность с теми же центром и радиусом. Найдем формулу для площади круга.

Прежде всего докажем, что *площадь выпуклого многоугольника, описанного около круга, вычисляется по формуле*

$$S = \frac{pr}{2},$$

где p — периметр, т. е. сумма длин сторон многоугольника, а r — радиус круга.

Проведем отрезки, соединяющие центр круга с вершинами многоугольника (рис. 202). Они разбивают наш многоугольник на треугольники A_1OA_2, A_2OA_3, ... Площадь многоугольника равна сумме площадей треугольников. Площади треугольников:

$$S(A_1OA_2) = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot r,\ S(A_2OA_3) = \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot r,\ \dots .$$

Складывая площади треугольников, получим площадь многоугольника:

$$S = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot r + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot r + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots) r.$$

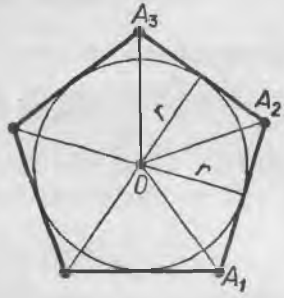


Рис. 202

В скобках стоит периметр многоугольника. Формула доказана.

Найдем теперь площадь S круга радиуса R. Опишем около круга правильный n-угольник P_1 и впишем в

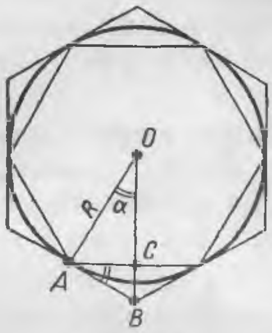


Рис. 203

круг правильный n-угольник P_2 (рис. 203). Многоугольник P_1 содержит круг, а следовательно, имеет площадь, бо́льшую площади круга. Многоугольник P_2 содержится в круге, а поэтому имеет площадь, меньшую площади круга. Площади многоугольников P_1 и P_2:

$$S_1 = \frac{1}{2} p_1 R, \quad S_2 = \frac{1}{2} p_2 r,$$

где r — радиус окружности, вписанной в многоугольник P_2, а p_1 и p_2 — периметры многоугольников P_1 и P_2.

Пусть b и a — стороны многоугольников P_1 и P_2. Из треугольника ACB (рис. 203) получаем:

$$AB = \frac{AC}{\cos\alpha}, \text{ или } \frac{b}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\alpha}, \text{ где } \alpha = \angle BAC = \frac{180^\circ}{n}.$$

Отсюда $nb = \frac{na}{\cos\alpha}$, т. е. $p_1 = \frac{p_2}{\cos\alpha}$. Из треугольника OAC получаем: $r = OC = R\cos\alpha$. Теперь

$$S_1 = \frac{1}{2} p_2 \frac{R}{\cos\alpha}, \quad S_2 = \frac{1}{2} p_2 R\cos\alpha.$$

При достаточно большом n периметр p_2 сколь угодно мало отличается от длины окружности круга, $\cos\alpha$ сколь угодно мало отличается от 1, так как угол α сколь угодно мал. Следовательно, S_1 сколь угодно мало отличается от $\frac{lR}{2}$, где l — длина окружности круга. По тем же соображениям и S_2 сколь угодно мало отличается от $\frac{lR}{2}$. Площадь круга S заключена между S_1 и S_2, поэтому и она сколь угодно мало отличается от $\frac{lR}{2}$. А это может быть только в том случае, когда $S = \frac{lR}{2}$.

Итак, *площадь круга вычисляется по формуле*

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2.$$

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла (рис. 204).

Рис. 204

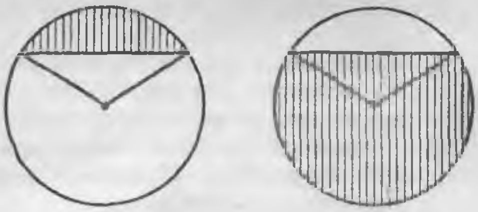


Рис. 205

Площадь кругового сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha,$$

где R — радиус круга, а α — градусная мера соответствующего центрального угла.

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости (рис. 205). ***Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле***

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_{\triangle},$$

где α — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а $S_{\triangle}$ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «—» надо брать, когда $\alpha < 180°$, а знак «+» надо брать, когда $\alpha > 180°$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сформулируйте свойства площади.
2. Докажите, что площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.
3. Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.
4. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.
5. Докажите, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
6. Докажите, что площадь описанного выпуклого многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус круга.
7. Как относятся площади подобных фигур?
8. Выведите формулу площади круга.
9. По каким формулам вычисляются площади кругового сектора и кругового сегмента?

1. Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.
2. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 м и 150 м. Найдите сторону квадратного участка, равновеликого им.
3. Найдите площадь квадрата S по его диагонали a.
4. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность?
5. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза?
6. Во сколько раз надо уменьшить стороны квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 25 раз?
7. Чему равны стороны прямоугольника, если они относятся как 4 : 9, а его площадь 144 м^2?
8. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м^2?
9. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.
10. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из фигур имеет бо́льшую площадь? Объясните ответ.
11. Найдите площадь ромба, если его высота 10 см, а острый угол 30°.
12. Найдите площадь ромба, если его высота 12 см, а меньшая диагональ 13 см.
13. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения диагоналей.
14. Найдите сторону ромба, зная, что его диагонали относятся как 1 : 2, а площадь ромба равна 12 см^2.
15. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей.
16. Докажите справедливость формулы для площади треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A.$$

17. У треугольника ABC $AC = a$, $BC = b$. При каком угле C площадь треугольника будет наибольшей?
18. Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны равны 1 м, а угол между ними равен 70°.
19. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны 2 м и 3 м, а один из углов равен 70°.

20. Найдите площадь треугольника по стороне a и прилежащим к ней углам α и β.

21. Докажите, что площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

22. Докажите, что среди всех параллелограммов с данными диагоналями наибольшую площадь имеет ромб.

23. Разделите данный треугольник на три равновеликих части прямыми, проходящими через одну вершину.

24. Решите предыдущую задачу, взяв вместо треугольника параллелограмм.

25. Чему равна площадь равнобедренного треугольника, если его основание 120 м, а боковая сторона 100 м?

26. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой a.

27. У треугольника со сторонами 8 см и 4 см проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к стороне 8 см, равна 3 см. Чему равна высота, проведенная к стороне 4 см?

28. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, т. е.

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

29. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a.

30. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

31. Чему равна площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки 32 см и 18 см?

32. Чему равны катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 см, а площадь равна 1320 см^2?

33. Найдите площадь треугольника по трем сторонам: 13, 14, 15.

34. Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами 13, 14, 15.

35. Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные — 13 см и 37 см.

36. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Найдите площадь трапеции.

37. Выведите формулу Герона для площади треугольника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, а p — полупериметр.

38. Выведите следующие формулы для радиусов описанной (R) и вписанной (r) окружностей треугольника:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

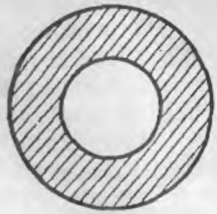


Рис. 206

39. Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) окружностей для треугольника со сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

40. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см, высота равна 4 см. Найдите радиус описанной окружности.

41. Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

42. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

43. Найдите площадь круга, если длина окружности l.

44. Найдите площадь кругового кольца (рис. 206), заключенного между двумя окружностями с одним и тем же центром и радиусами: 1) 4 см и 6 см; 2) 5,5 м и 6,5 м; 3) a и b ($a > b$).

45. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить: 1) в 2 раза ; 2) в 5 раз; 3) в m раз?

46. Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника.

47. Найдите отношение площади круга, вписанного в правильный треугольник, к площади круга, описанного около него.

48. Найдите отношение площади круга, описанного около квадрата, к площади круга, вписанного в него.

49. Найдите площадь сектора круга радиуса R, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

50. Дана окружность радиуса R. Найдите площадь сектора, соответствующего дуге с длиной, равной: 1) R; 2) l.

51. Найдите площадь кругового сегмента с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой $\frac{a}{2}$.

52. Найдите площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него: 1) квадрата, 2) правильного треугольника, 3) правильного шестиугольника. Радиус круга R.

9 класс

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 14. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. В стереометрии так же, как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. При этом отправными являются свойства основных геометрических фигур, выражаемые аксиомами. Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость. Введение нового геометрического образа — плоскости — заставляет расширить систему аксиом. А именно мы вводим группу аксиом С, которая выражает основные свойства плоскостей в пространстве. Эта группа состоит из следующих трех аксиом:

C_1. ***Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.***

C_2. ***Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.***

Этой аксиомой утверждается, что если две различные плоскости α и β имеют общую точку, то существует прямая c, принадлежащая каждой из этих плоскостей. При этом если точка C принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой c.

C_3. ***Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.***

Это значит, что если две различные прямые a и b имеют общую точку C, то существует плоскость γ, содержащая прямые a и b. Плоскость, обладающая этим свойством, единственна.

Таким образом, система аксиом стереометрии состоит из аксиом планиметрии и группы аксиом С. Для удобства изложения напомним аксиомы планиметрии первой группы.

I_1. ***Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.***

I_2. ***Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.***

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ

Теорема 14.1. ***Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.***

Доказательство. Пусть a — данная прямая и B — не лежащая на ней точка (рис. 207). Отметим на прямой a какую-нибудь точку A. Такая точка существует по аксиоме I_1. Проведем через точки A и B прямую b (аксиома I_2). Прямые a и b различны, так как точка B прямой b не лежит на прямой a. Прямые a и b имеют общую точку A. Проведем через прямые a и b плоскость α (аксиома C_3). Эта плоскость проходит через прямую a и точку B.

Докажем теперь, что плоскость α, проходящая через прямую a и точку B, единственна. Допустим что существует другая, отличная от α, плоскость α', проходящая через прямую a и точку B. По аксиоме C_2 плоскости α и α', будучи различными, пересекаются по прямой. Следовательно, любые три общие точки плоскостей α и α' лежат на прямой. Но точка B и две точки прямой a заведомо не лежат на одной прямой. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

Задача (5). Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.

Решение. Допустим, что какие-нибудь три точки лежат на одной прямой. Проведем через эту прямую и четвертую точку плоскость (теорема 14.1). В этой плоскости лежат все четыре точки. А это противоречит условию задачи. Значит, никакие три точки не могут лежать на одной прямой.

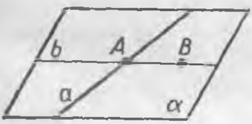


Рис. 207

Теорема 14.2. ***Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.***

Доказательство. Пусть a — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 208). По аксиоме I_1 существует точка A, не лежащая на прямой a. Проведем через прямую a и точку A плоскость α'. Если плоскость α' совпадает с α, то плоскость α содержит прямую a, что и утверждается теоремой. Если плоскость α' отлична от α, то эти плоскости пересекаются по прямой a', содержащей две точки прямой a. По аксиоме I_2 прямая a' совпадает с a и, следовательно, прямая a лежит в плоскости α. Теорема доказана.

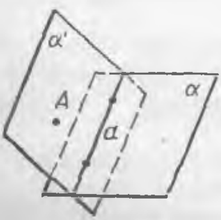


Рис. 208

Из теоремы 14.2 следует, что *плоскость и не лежащая на ней прямая либо не*

пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

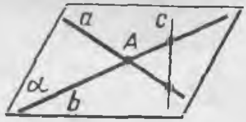


Рис. 209

З а д а ч а (7). Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Проведем через данные прямые a и b плоскость α (рис. 209). Это можно сделать по аксиоме C_3. Прямая c, пересекающая данные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки M и N (точки пересечения с данными прямыми). По теореме 14.2 эта прямая должна лежать в плоскости α.

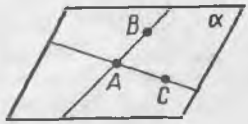


Рис. 210

Т е о р е м а 14.3. ***Через три точки, не лежащие на прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A, B, C — три данные точки, не лежащие на одной прямой (рис. 210). Проведем прямые AB и AC; они различны, так как точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме C_3 через прямые AB и AC можно провести плоскость α. Эта плоскость содержит точки A, B, C.

Докажем, что плоскость α, проходящая через точки A, B, C, единственна. Действительно, плоскость, проходящая через точки A, B, C, по теореме 14.2 содержит прямые AB и AC. А по аксиоме C_3 такая плоскость единственна.

З а д а ч а (11). Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Объясните ответ.

Р е ш е н и е. Пусть A, B, C — три точки, лежащие на прямой a. Возьмем точку D, не лежащую на прямой a (аксиома I_1). Через точки A, B, D можно провести плоскость (теорема 14.3). Эта плоскость содержит две точки прямой a — точки A и B, а значит, содержит и точку C этой прямой (теорема 14.2). Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, всегда можно провести плоскость.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что такое стереометрия?
2. Сформулируйте аксиомы группы С.
3. Докажите, что через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
4. Докажите, что если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит плоскости.
5. Докажите, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.
2. Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, не лежащую с ними в одной плоскости? Объясните ответ.
3. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.
4. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.
5. Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.
6. Даны две не пересекающиеся плоскости. Докажите, что прямая, пересекающая одну из этих плоскостей, пересекает и другую.
7. Даны две различные прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, пересекающие данные и не проходящие через точку A, лежат в одной плоскости.
8. Докажите, что все прямые, пересекающие данную прямую и проходящие через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости.
9. Докажите, что если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то прямые AC и BD также не лежат в одной плоскости.
10. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящих через три из этих точек? Объясните ответ.
11. Можно ли провести плоскость через три точки, если они лежат на одной прямой? Объясните ответ.
12. Можно ли через три точки, лежащие на одной прямой, провести две различные плоскости? Объясните ответ.
13. Даны четыре точки. Известно, что прямая, проходящая через любые две из этих точек, не пересекается с прямой, проходящей через другие две точки. Докажите, что данные четыре точки не лежат в одной плоскости.

§ 15. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются ***скрещивающимися***.

З а д а ч а (1). Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

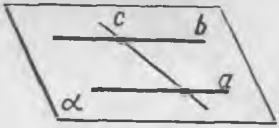


Рис. 211

Р е ш е н и е. Так как данные прямые a и b параллельны, то через них можно провести плоскость (рис. 211). Обозначим ее α. Прямая c, пересекающая данные параллельные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки — точки пересечения с данными прямыми. По теореме 14.2 эта прямая лежит в плоскости α. Итак, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости — плоскости α.

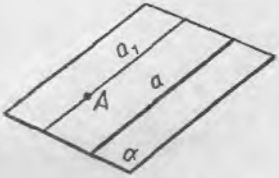


Рис. 212

Т е о р е м а 15.1. ***Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.***

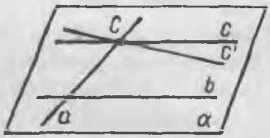


Рис. 213

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — данная прямая и A — точка, не лежащая на этой прямой (рис. 212). Проведем через прямую a и точку A плоскость α. Проведем через точку A в плоскости α прямую a_1, параллельную a. Докажем, что прямая a_1, параллельная a, единственна.

Допустим, что существует другая прямая a_2, проходящая через точку A и параллельная прямой a. Через прямые a и a_2 можно провести плоскость α_2. Плоскость α_2 проходит через прямую a и точку A; следовательно, по теореме 14.1 она совпадает с α. Теперь по аксиоме параллельных прямые a_1 и a_2 совпадают. Теорема доказана.

З а д а ч а (2). Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Пусть c — прямая, параллельная прямой b и пересекающая прямую a (рис. 213). Проведем через прямые a и b плоскость α. Проведем через точку C пересечения прямых a и c в плоскости α прямую c', параллельную b. По теореме 15.1 через точку C можно провести только одну прямую, параллельную b. Отсюда следует, что прямая c совпадает с прямой c', а значит, лежит в плоскости α. Итак, любая прямая c, параллельная b и пересекающая прямую a, лежит в плоскости α. Что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 15.2. ***Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.***

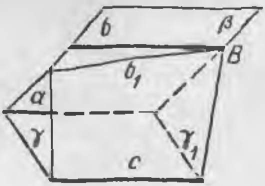


Рис. 214

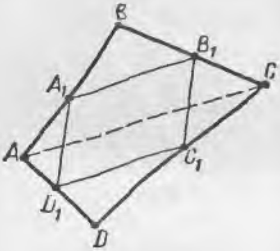


Рис. 215

Доказательство. Пусть прямые b и c параллельны прямой a. Докажем, что прямые b и c параллельны.

Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Поэтому предположим, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Пусть β — плоскость, в которой лежат прямые a и b, а γ — плоскость, в которой лежат прямые a и c. Плоскости β и γ различны (рис. 214). Отметим на прямой b какую-нибудь точку B и проведем плоскость γ_1 через прямую c и точку B. Она пересечет плоскость β по прямой b_1.

Прямая b_1 не пересекает плоскость γ. Действительно, точка пересечения должна принадлежать прямой a, так как прямая b_1 лежит в плоскости β. С другой стороны, она должна лежать и на прямой c, так как прямая b_1 лежит в плоскости γ_1. Но прямые a и c как параллельные не пересекаются.

Так как прямая b_1 лежит в плоскости β и не пересекает прямую a, то она параллельна a, а значит, совпадает с b по аксиоме параллельных. Таким образом, прямая b, совпадая с прямой b_1, лежит в одной плоскости с прямой c (в плоскости γ_1) и не пересекает ее. Значит, прямые b и c параллельны. Теорема доказана.

Задача (10). Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный пространственный четырехугольник (вершины четырехугольника не лежат в одной плоскости) (рис. 215). Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — середины его сторон. Тогда A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, C_1D_1 — средняя линия треугольника ACD, тоже параллельная стороне AC. По теореме 15.2 прямые A_1B_1 и C_1D_1 параллельны, а значит, лежат в одной плоскости. Точно так же доказывается параллельность прямых A_1D_1 и B_1C_1. Итак, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ лежит в одной плоскости и его противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он — параллелограмм.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 15.3. ***Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плос-***

кости, то она параллельна и самой плоскости.

Доказательство. Пусть α — плоскость, a — не лежащая в ней прямая и a_1 — прямая в плоскости α, параллельная прямой a. Проведем плоскость α_1 через прямые a и a_1 (рис. 216). Она отлична от α, так как прямая a не лежит в плоскости α. Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1. Если бы прямая a пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно, так как прямые a и a_1 параллельны. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, а значит, параллельна плоскости α. Теорема доказана.

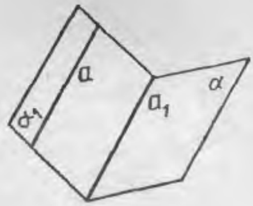


Рис. 216

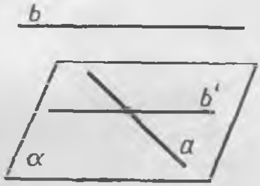


Рис. 217

Задача (16). Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.

Решение. Пусть a и b — две скрещивающиеся прямые (рис. 217). Возьмем на прямой a любую точку и проведем через нее прямую b', параллельную прямой b. Проведем через прямые a и b' плоскость α. По теореме 15.3 она будет параллельна прямой b.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Теорема 15.4. ***Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.***

Доказательство. Пусть α и β — данные плоскости и b_1, b_2 — две пересекающиеся прямые в плоскости β, параллельные плоскости α (рис. 218). Плоскости α и β различны. Допустим, что они пересекаются по некоторой прямой c. Прямые b_1 и b_2 не пересекают плоскость α; следовательно, не пересекают прямую c этой плоскости. Но это невозможно по аксиоме параллельных, так как прямые b_1, b_2 и c лежат в одной плоскости — плоскости β. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача (19). Даны две скрещивающиеся прямые. Как провести через них две параллельные плоскости?

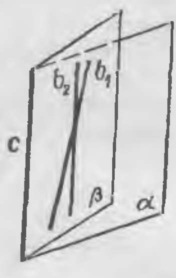


Рис. 218

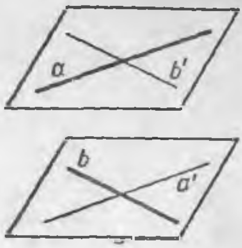


Рис. 219

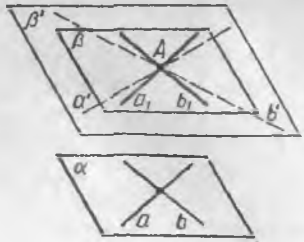


Рис. 220

Решение. Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 219). Через произвольную точку прямой a проведем прямую b', параллельную b, а через произвольную точку прямой b проведем прямую a', параллельную a. Теперь проведем две плоскости—одну через прямые a и b', а другую через прямые b и a'. По теореме 15.4 эти плоскости параллельны. В первой из них лежит прямая a, а во второй — прямая b.

Теорема 15.5. ***Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.***

Доказательство. Проведем в данной плоскости α какие-нибудь две пересекающиеся прямые a и b (рис. 220). Через данную точку A проведем параллельные им прямые a_1 и b_1. Плоскость β, проходящая через прямые a_1 и b_1, по теореме 15.4 параллельна плоскости α.

Допустим, что через точку A проходит другая плоскость—β', параллельная плоскости α. Плоскость параллельных прямых a и a_1 пересекает плоскость β' по прямой a'. Прямая a' не пересекает прямую a, так как она не пересекает содержащую a плоскость α. Поэтому прямая a' параллельна прямой a и, значит, по аксиоме параллельных совпадает с прямой a_1. Плоскость параллельных прямых b и b_1 пересекает плоскость β' по прямой b'. Прямая b' не пересекает прямую b. Поэтому прямая b' параллельна прямой b, а значит, совпадает с прямой b_1. Так как по аксиоме C_3 через прямые a_1 и b_1 можно провести только одну плоскость, то плоскость β' совпадает с плоскостью β. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Задача (23). Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?

Решение. Плоскости α и β не могут пересекаться. Если бы плоскости α и β имели общую точку, то через эту точку проходили бы две плоскости (α и β), параллельные плоскости γ. А это противоречит теореме 15.5.

Теорема 15.6. ***Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны*** (рис.221).

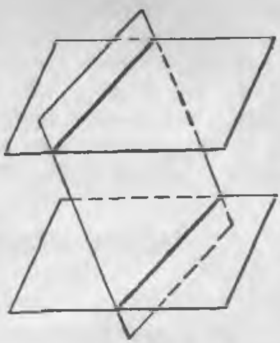


Рис. 221

Доказательство. Согласно определению параллельные прямые — это прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Наши прямые лежат в одной плоскости — секущей плоскости. Они не пересекаются, так как не пересекаются содержащие их параллельные плоскости. Значит, прямые параллельны. Теорема доказана.

Задача (33). Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

Решение. Проведем через точку A другую прямую и обозначим через Y_1 и Y_2 точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2 (рис. 222). Проведем через прямые AX_1 и AY_1 плоскость. Она пересечет плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым X_1Y_1 и X_2Y_2 (теорема 15.6). Отсюда следует подобие треугольников AX_1Y_1 и AX_2Y_2. А из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{AX_1}{AX_2}=\frac{AY_1}{AY_2},$$

т. е. отношения $AX_1 : AX_2$ и $AY_1 : AY_2$ одинаковы для обеих прямых.

Теорема 15.7 ***Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.***

Доказательство. Пусть α_1 и α_2 — параллельные плоскости, a и b — пересекающие их параллельные пря-

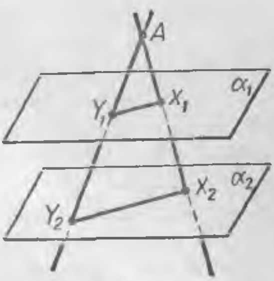


Рис. 222

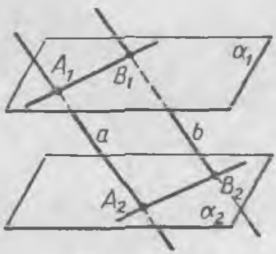


Рис. 223

мые, A_1, A_2 и B_1, B_2—точки пересечения прямых с плоскостями (рис. 223). Проведем через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскости α_1 и α_2 по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2. Четырехугольник $A_1B_1B_2A_2$ — параллелограмм, так как у него противолежащие стороны параллельны. А у параллелограмма противолежащие стороны равны. Значит, $A_1A_2 = B_1B_2$. Теорема доказана.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ

Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются параллельным проектированием. Этот способ изображения фигуры состоит в следующем. Берем произвольную прямую h, пересекающую плоскость чертежа, и проводим через произвольную точку A фигуры прямую, параллельную h. Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью чертежа будет изображением точки A (рис. 224). Построив таким образом изображение каждой точки фигуры, получим изображение самой фигуры. Такой способ изображения пространственной фигуры на плоскости соответствует зрительному восприятию фигуры при рассматривании ее издали.

Отметим некоторые свойства изображения фигуры на плоскости, вытекающие из описанного ее построения.

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками (рис. 225). Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость чертежа α по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

З а м е ч а н и е. В только что доказанном свойстве и далее предполагается, конечно, что проектируемые отрезки не параллельны направлению проектирования.

Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа параллельными отрезками (рис. 226). Дейст-

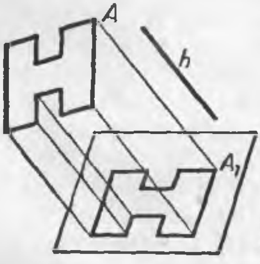


Рис. 224

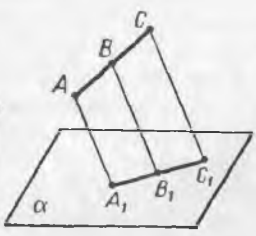


Рис. 225

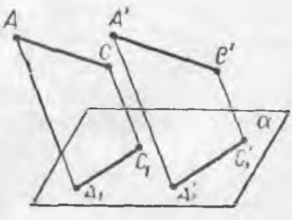


Рис. 226

вительно, пусть AC и $A'C'$ — параллельные отрезки фигуры. Прямые A_1C_1 и $A_1'C_1'$ параллельны, так как они получаются при пересечении параллельных плоскостей с плоскостью α. Первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA_1, а вторая — через прямые $A'C'$ и $A'A_1'$.

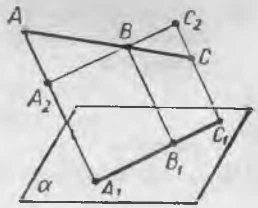


Рис. 227

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании.

Покажем, например, что (рис. 227)

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \qquad (*)$$

Проведем через точку B прямую, параллельную A_1C_1. Треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны. Из подобия треугольников следует пропорция (*).

Задача (39). Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

Решение. При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Докажите, что через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
4. Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны.
5. Что значит: прямая и плоскость параллельны?
6. Докажите, что плоскость и не лежащая в ней прямая параллельны, если в плоскости найдется прямая, параллельная данной прямой.
7. Какие плоскости называются параллельными?
8. Докажите, что две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.
9. Докажите, что через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

10. Докажите, что если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
11. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.
12. Перечислите свойства параллельного проектирования.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.
2. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.
3. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
4. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость и если: 1) $AA_1=5$ м, $BB_1=7$ м; 2) $AA_1=3{,}6$ дм, $BB_1=4{,}8$ дм; 3) $AA_1=8{,}3$ см, $BB_1=4{,}1$ см; 4) $AA_1=a$, $BB_1=b$.
5. Решите предыдущую задачу при условии, что отрезок AB пересекает плоскость.
6. Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка BB_1, если: 1) $CC_1=15$ см, $AC:BC=2:3$; 2) $CC_1=8{,}1$ см, $AB:AC=11:9$; 3) $AB=6$ см, $AC:CC_1=2:5$; 4) $AC=a$, $BC=b$, $CC_1=c$.
7. Даны параллелограмм $ABCD$ и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Найдите длину отрезка DD_1, если: 1) $AA_1=2$ м, $BB_1=3$ м, $CC_1=8$ м; 2) $AA_1=4$ м, $BB_1=3$ м, $CC_1=1$ м; 3) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$.
8. Прямые a и b не лежат в одной плоскости. Можно ли провести прямую c, параллельную прямым a и b? Объясните ответ.
9. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и BC, параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AD и CD.
10. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
11. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что прямые, соединяющие середины от-

резков AB и CD, AC и BD, AD и BC, пересекаются в одной точке.

12. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC — в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если: 1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$; 2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$; 3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.
13. Через данную точку проведите прямую, параллельную каждой из двух данных пересекающихся плоскостей.
14. Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD тоже скрещивающиеся.
15. Прямые AB и CD пересекаются. Могут ли прямые AC и BD быть скрещивающимися?
16. Докажите, что через любую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.
17. Докажите, что если две плоскости, пересекающиеся по прямой a, пересекают плоскость α по параллельным прямым, то прямая a параллельна плоскости α.
18. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.
19. Даны две скрещивающиеся прямые. Как провести через них две параллельные плоскости?
20. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую каждую из двух скрещивающихся прямых. Всегда ли это возможно?
21. Докажите, что геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость.
22. Даны четыре точки A, B, C и D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что любая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD и BC в вершинах параллелограмма.
23. Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Могут ли плоскости α и β пересекаться?
24. Плоскости α и β пересекаются. Докажите, что любая плоскость γ пересекает хотя бы одну из плоскостей α, β.
25. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.
26. Через данную точку проведите плоскость, параллельную каждой из двух пересекающихся прямых. Всегда ли это возможно?
27. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 лежат в разных плоскостях. Докажите, что четырехугольник CDD_1C_1 тоже параллелограмм.
28. Через вершины параллелограмма $ABCD$, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость

в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже параллелограмм.

29. Через вершины треугольника ABC, лежащего в одной из двух параллельных плоскостей, проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

30. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

31. Докажите, что если четыре прямые, проходящие через точку A, пересекают плоскость α в вершинах параллелограмма, то они пересекают любую плоскость, параллельную α и не проходящую через A, тоже в вершинах параллелограмма.

32. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из этих плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1. Чему равен отрезок A_1B_1, если $AB = a$?

33. Даны две параллельные плоскости α_1 и α_2 и точка A, не лежащая ни в одной из этих плоскостей. Через точку A проведена произвольная прямая. Пусть X_1 и X_2 — точки пересечения ее с плоскостями α_1 и α_2. Докажите, что отношение длин отрезков $AX_1 : AX_2$ не зависит от взятой прямой.

34. Точка A лежит вне плоскости α, X — произвольная точка плоскости α, X' — точка отрезка AX, делящая его в отношении $m : n$. Докажите, что геометрическое место точек X' есть плоскость, параллельная плоскости α.

35. Даны три параллельные плоскости: α_1, α_2, α_3. X_1, X_2, X_3 — точки пересечения этих плоскостей с произвольной прямой. Докажите, что отношение длин отрезков $X_1X_2 : X_2X_3$ не зависит от прямой, т. е. одинаково для любых двух прямых.

36. Даны четыре параллельные прямые. Докажите, что если какая-нибудь плоскость пересекает эти прямые в вершинах параллелограмма, то любая плоскость, не параллельная данным прямым, пересекает их в вершинах некоторого параллелограмма.

37. Даны две параллельные плоскости, пересекающая их прямая и окружность в одной из плоскостей. Через каждую точку X окружности проводится прямая, параллельная данной прямой и пересекающая вторую плоскость в некоторой точке X'. Что представляет собой геометрическое место точек X'? Объясните ответ.

38. Даны две параллельные плоскости, точка вне этих плоскостей и окружность в одной из плоскостей. Через каждую точку X окружности и данную точку проводит-

ся прямая, пересекающая вторую плоскость в некоторой точке X'. Что представляет собой геометрическое место точек X'? Объясните ответ.

39. Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?
40. Дана параллельная проекция треугольника. Чем изобразится проекция средней линии треугольника?
41. Может ли при параллельном проектировании параллелограмма получиться трапеция? Объясните ответ.
42. Может ли проекция параллелограмма при параллельном проектировании быть квадратом?
43. Докажите, что параллельная проекция центрально-симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.
44. Дана параллельная проекция окружности и ее диаметра. Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?

§ 16. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ

Так же, как и на плоскости, две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема 16.1. ***Пересекающиеся прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.***

Доказательство. Пусть a и b — перпендикулярные прямые, a_1 и b_1 — параллельные им пересекающиеся прямые. Докажем, что прямые a_1 и b_1 перпендикулярны. Если прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости, то они обладают указанным в теореме свойством (рис. 228). Действительно, так как прямые b и b_1 параллельны, то прямая a, будучи перпендикулярна прямой b, будет перпендикулярна и прямой b_1. Так как прямые a и a_1 параллельны, то прямая b_1, будучи перпендикулярна a, будет перпендикулярна и a_1.

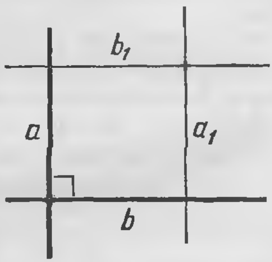


Рис. 228

Допустим теперь, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Тогда прямые a и b лежат в некоторой плоскости α, а прямые a_1 и b_1 — в некоторой плоскости α_1 (рис. 229). По теореме 15.3 прямые a и b параллельны плоскости α_1. По теореме 15.4 плоскости α и α_1 параллель-

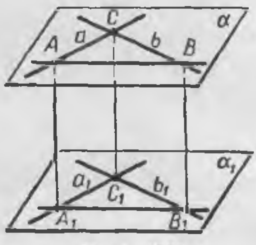


Рис. 229

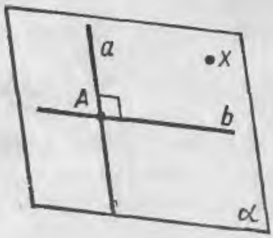


Рис. 230

ны. Пусть C — точка пересечения прямых a и b, а C_1 — точка пересечения прямых a_1 и b_1. Проведем в плоскости параллельных прямых a и a_1 прямую, параллельную прямой CC_1. Она пересечет прямые a и a_1 в точках A и A_1. В плоскости прямых b и b_1 проведем прямую, параллельную прямой CC_1, и обозначим через B и B_1 точки ее пересечения с прямыми b и b_1.

Четырехугольники CAA_1C_1 и CBB_1C_1 — параллелограммы, так как у них противолежащие стороны параллельны. Четырехугольник ABB_1A_1 также параллелограмм. У него стороны AA_1, BB_1 параллельны, потому что каждая из них параллельна прямой CC_1. Таким образом, четырехугольник лежит в плоскости, проходящей через параллельные прямые AA_1 и BB_1. А она пересекает параллельные плоскости α и α_1 по параллельным прямым AB и A_1B_1.

Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. По третьему признаку равенства треугольников треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Следовательно, угол $A_1C_1B_1$, равный углу ACB, прямой, т. е. прямые a_1 и b_1 перпендикулярны. Теорема доказана.

Задача (1). Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Решение. Пусть a — данная прямая и A — точка на ней (рис. 230). Возьмем любую точку X вне прямой a и проведем через эту точку и прямую a плоскость α (теорема 14.1). В плоскости α через точку A можно провести прямую b, перпендикулярную прямой a. Что и требовалось доказать.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

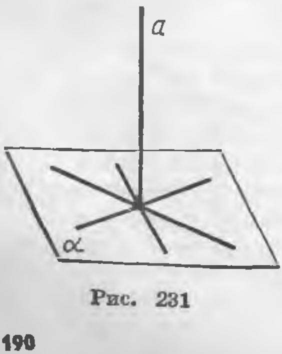


Рис. 231

Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

На рисунке 231 прямая a перпендикулярна плоскости α.

Теорема 16.2. ***Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости.***

Доказательство. Пусть a — прямая, пересекающая плоскость α в точке A и перпендикулярная прямым b и c в этой плоскости, которые проходят через точку A (рис. 232). Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости α.

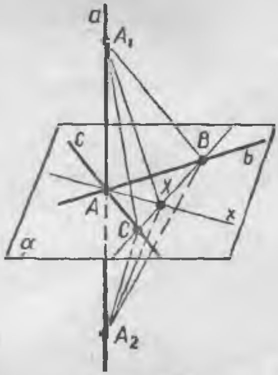


Рис. 232

Проведем произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Можно считать, что прямая x отлична от прямых b и c. Проведем в плоскости α произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X.

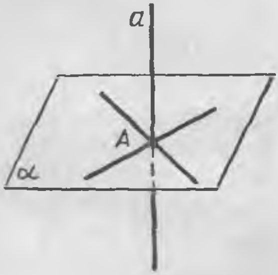


Рис. 233

Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки: AA_1 и AA_2. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AA_1 = AA_2$). По той же причине треугольник A_1BA_2 тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники A_1BC и A_2BC равны по третьему признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников A_1BC и A_2BC следует равенство углов A_1BX, A_2BX и, следовательно, равенство треугольников A_1BX и A_2BX по первому признаку равенства треугольников. Из равенства сторон A_1X и A_2X этих треугольников заключаем, что треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a. Теорема доказана.

Задача (4). Докажите, что через любую точку данной прямой можно провести перпендикулярную ей плоскость.

Решение. Пусть a — данная прямая и A — точка на ней (рис. 233). Проведем через точку A две различные перпендикулярные ей прямые (см. задачу 1). Проведем через эти прямые плоскость α (аксиома C_3). Плоскость α проходит через точку A и перпендикулярна прямой a (теорема 16.2).

Теорема 16.3. ***Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.***

Доказательство. Пусть a_1 и a_2—две параллельные прямые и α — плоскость, перпендикулярная прямой a_1

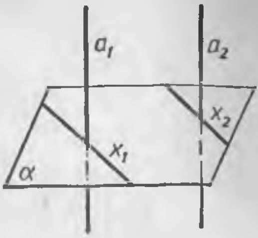


Рис. 234

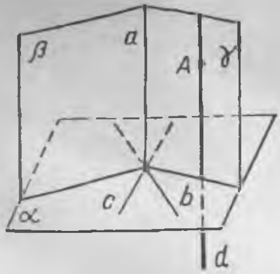


Рис. 235

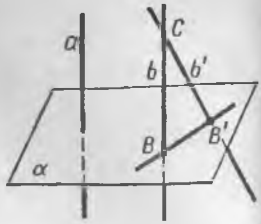


Рис. 236

(рис. 234). Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой a_2. Проведем через точку пересечения прямой a_2 с плоскостью α произвольную прямую x_2 в плоскости α. Проведем через точку пересечения прямой a_1 с плоскостью α прямую x_1, параллельную прямой x_2. Она лежит в плоскости α. Так как прямая a_1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a_1 и x_1 перпендикулярны. А по теореме 16.1 параллельные им пересекающиеся прямые a_2 и x_2 тоже перпендикулярны. Таким образом, прямая a_2 перпендикулярна любой прямой x_2 в плоскости α. А это значит, что прямая a_2 перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

Задача (6). Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

Решение. Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые b и c (рис. 235). Через точку их пересечения проведем плоскости β и γ, перпендикулярные прямым b и c соответственно. Они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a перпендикулярна прямым b и c, а значит, и плоскости α. Проведем теперь через точку A прямую d, параллельную a. По теореме 16.3 она перпендикулярна плоскости α.

Теорема 16.4. ***Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.***

Доказательство. Пусть a и b — две прямые, перпендикулярные плоскости α (рис. 236). Допустим, что прямые a и b не параллельны. Проведем через какую-нибудь точку C прямой b прямую b', параллельную прямой a. Прямая b' перпендикулярна плоскости α (теорема 16.3). Пусть B и B' — точки пересечения прямых b и b' с плоскостью α. Тогда прямая BB' перпендикулярна пересекающимся прямым b и b'. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*. *Расстоянием* от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, не являющийся перпендикуляром к плоскости, с одним концом в данной точке, а другим — на плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется *проекцией наклонной*.

На рисунке 237 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B — основание перпендикуляра, точка C — основание наклонной, BC — проекция наклонной AC на плоскость α.

Задача (9). Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

Решение. Пусть a — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 238). Возьмем на прямой a две произвольные точки X и Y. Их расстояния до плоскости α — это длины перпендикуляров XX' и YY', опущенных на эту плоскость. По теореме 16.4 прямые XX' и YY' параллельны; следовательно, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой $X'Y'$. Прямая a параллельна прямой $X'Y'$, так как не пересекает содержащую ее плоскость α. Итак, у четырехугольника $XX'Y'Y$ противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм, а значит, $XX' = YY'$, что и требовалось доказать.

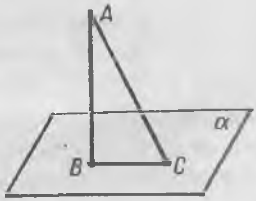


Рис. 237

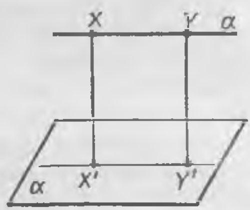


Рис. 238

Теорема 16.5 (теорема о трех перпендикулярах). ***Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. И обратно, если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.***

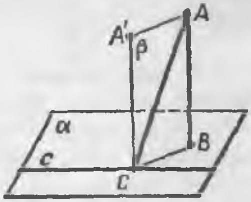


Рис. 239

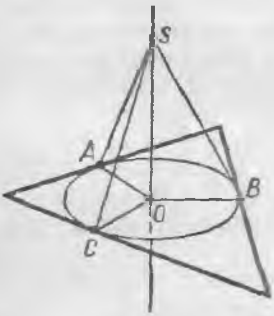


Рис. 240

Доказательство. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC—наклонная и c—прямая в плоскости α, проходящая через основание C наклонной (рис. 239). Проведем прямую CA', перпендикулярную плоскости α. Она параллельна прямой AB (теорема 16.4). Проведем через прямые AB и $A'C$ плоскость β. Прямая c перпендикулярна прямой CA'. Если она перпендикулярна прямой CB, то она перпендикулярна плоскости β, а значит, и прямой AC.

Аналогично, если прямая c перпендикулярна наклонной CA, то она, будучи перпендикулярна и прямой CA', перпендикулярна плоскости β, а значит, и проекции наклонной BC. Теорема доказана.

Задача (32). Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

Решение. Пусть A, B, C—точки касания сторон треугольника с окружностью, O — центр окружности и S— точка на перпендикуляре (рис. 240). Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме 16.5 отрезок SA есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина—расстояние от точки S до стороны треугольника. По теореме Пифагора $SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$, где r — радиус вписанной окружности. Аналогично находим: $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$, $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$, т. е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными*, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

На рисунке 241, *а* вы видите две перпендикулярные плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c. Плоскость γ, перпендикулярная прямой c, пересекает плоскости α и β по перпендикулярным прямым a и b. Определение перпендикулярности плоскостей не зависит от выбора плоскости γ. Действительно, если взять другую плоскость γ', перпендикулярную прямой

c, то она пересечет плоскости α и β по прямым a' и b', которые параллельны прямым a и b соответственно (рис. 241, *б*). По теореме 16.1 из перпендикулярности прямых a и b следует перпендикулярность прямых a' и b'.

Теорема 16.6. ***Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.***

Доказательство. Пусть α — плоскость, b — перпендикулярная ей прямая, β — плоскость, проходящая через прямую b, и c — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 242). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. Проведем в плоскости α прямую a через точку пересечения прямой b с плоскостью α, перпендикулярную прямой c. Проведем через прямые a и b плоскость γ. Она перпендикулярна прямой c, так как прямая c перпендикулярна прямым a и b. Так как прямые a и b перпендикулярны, то плоскости α и β перпендикулярны. Теорема доказана.

Задача (52). Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

Решение. Через произвольную точку прямой a проводим прямую b (рис. 243), перпендикулярную плоскости α (задача 6). Через прямые a и b проводим плоскость β. Плоскость β перпендикулярна плоскости α по теореме 16.6.

Теорема 16.7. ***Если в одной из двух перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную прямой их пересечения, то она будет перпендикулярна и другой плоскости.***

Доказательство. Пусть α и β—данные перпендикулярные плоскости, пересекающиеся по прямой c, и a — прямая в плоскости α, перпендикулярная c (рис. 244). Докажем, что прямая a

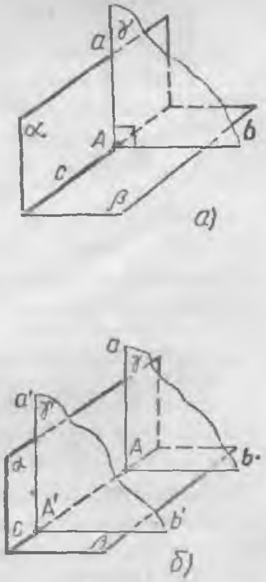


Рис. 241

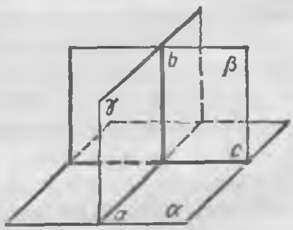


Рис. 242

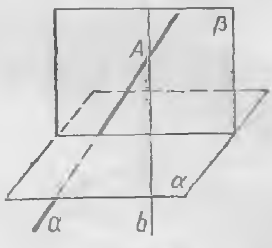


Рис. 243

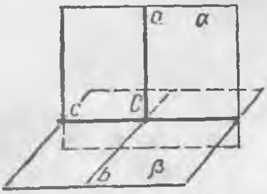


Рис. 244

перпендикулярна плоскости β. Через точку C пересечения прямых a и c проведем прямую b в плоскости β, перпендикулярную прямой c. Плоскость γ, проходящая через прямые a и b, перпендикулярна прямой c, так как лежащие в ней прямые a и b перпендикулярны прямой c. Так как плоскости α и β перпендикулярны, то прямые a и b перпендикулярны. Кроме того, прямые a и c перпендикулярны (по условию), поэтому прямая a перпендикулярна плоскости β. Теорема доказана.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Докажем, что *две скрещивающие прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.*

Доказательство. Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 245). Проведем через них параллельные плоскости α и β (задача 13 § 15). Прямые, пересекающие прямую a и перпендикулярные плоскости α, лежат в одной плоскости (γ). Эта плоскость пересекает плоскость β по прямой a', параллельной a. Пусть B — точка пересечения прямых a' и b. Тогда прямая AB, перпендикулярная плоскости α, перпендикулярна и плоскости β, так как β параллельна α. Отрезок AB — общий перпендикуляр плоскостей α и β, а значит, и прямых a и b.

Допустим, что у прямых a и b есть другой общий перпендикуляр CD. Проведем через точку C прямую b', параллельную b. Прямая CD перпендикулярна прямой b, а значит, и b'. Так как она перпендикулярна прямой a, то она перпендикулярна плоскости α, а значит, параллельна прямой AB. Выходит, что через прямые AB и CD, как через параллельные, можно провести плоскость. В этой плоскости будут лежать наши скрещивающиеся прямые AC и BD, а это невозможно. Теорема доказана.

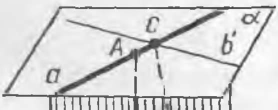


Рис. 245

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. *Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.*

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Докажите, что пересекающиеся прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.
3. Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
4. Докажите, что если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, то она перпендикулярна плоскости.
5. Докажите, что если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
6. Докажите, что две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.
7. Что такое перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость?
8. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
9. Что такое наклонная, проведенная из данной точки к плоскости? Что такое проекция наклонной?
10. Докажите теорему о трех перпендикулярах.
11. Какие плоскости называются перпендикулярными?
12. Докажите, что если плоскость, проходит через прямую, перпендикулярную данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.
13. Докажите, что если в одной из двух перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную прямой их пересечения, то она будет перпендикулярна другой плоскости.
14. Что такое общий перпендикуляр скрещивающихся прямых?
15. Докажите, что скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.
16. Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.
2. Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести две различные перпендикулярные ей прямые.
3. Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны. Найдите отрезок CD, если: 1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см; 2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;

3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$; 4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$.

4. Докажите, что через любую точку данной прямой можно провести перпендикулярную ей плоскость.
5. Докажите, что через любую точку плоскости можно провести перпендикулярную ей прямую.
6. Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.
7. Докажите, что через точку, не лежащую в данной плоскости, нельзя провести более одной прямой, перпендикулярной плоскости.
8. Точка A находится на расстоянии a от вершин равностороннего треугольника со стороной a. Найдите расстояние от точки A до плоскости треугольника.
9. Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.
10. Докажите, что расстояния от всех точек плоскости до параллельной плоскости одинаковы.
11. Найдите геометрическое место оснований наклонных данной длины, проведенных из данной точки к плоскости.
12. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см. Разность проекций этих наклонных равна 9 см. Найдите проекции наклонных.
13. Из точки к плоскости проведены две наклонные, одна из которых на 26 см больше другой. Проекции наклонных равны 12 см и 40 см. Найдите наклонные.
14. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если они относятся как 1 : 2 и проекции наклонных равны 1 см и 7 см.
15. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 23 см и 33 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости, если проекции наклонных относятся как 2 : 3.
16. Через центр описанной около треугольника окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от вершин треугольника.
17. Из точки S вне плоскости α проведены к ней три равные наклонные SA, SB, SC и перпендикуляр SO. Докажите, что основание перпендикуляра O является центром окружности, описанной около треугольника ABC.
18. Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно a. Отрезок длины b своими концами упирается в эти плоскости. Найдите проекцию отрезка на каждую из плоскостей.
19. Два отрезка длин a и b упираются концами в две параллельные плоскости. Проекция первого отрезка (длины a)

на плоскость равна c. Найдите проекцию второго отрезка.

20. Концы данного отрезка, не пересекающего плоскость, удалены от нее на 0,3 м и 0,5 м. Как удалена от плоскости точка, делящая данный отрезок в отношении 3 : 7?
21. Через середину отрезка проведена плоскость. Докажите, что концы отрезка находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.
22. Через диагональ параллелограмма проведена плоскость. Докажите, что концы другой диагонали находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.
23. Найдите расстояние от середины отрезка AB до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояния от точек A и B до плоскости равны: 1) 3,2 см и 5,3 см; 2) 7,4 см и 6,1 см; 3) a и b.
24. Решите предыдущую задачу, считая, что отрезок AB пересекает плоскость.
25. Отрезок длиной 1 м пересекает плоскость, концы его удалены от плоскости на 0,5 м и 0,3 м. Найдите длину проекции отрезка на плоскость.
26. Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где ее прикрепили на высоте 20 м. Найдите расстояние между домом и столбом, предполагая, что проволока не провисает.
27. Через основание трапеции проведена плоскость, отстоящая от другого основания на расстояние a. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до этой плоскости, если основания трапеции относятся как $m : n$.
28. Через сторону параллелограмма проведена плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до этой плоскости.
29. Из точек A и B опущены перпендикуляры на плоскость α. Найдите расстояние между точками A и B, если перпендикуляры равны 3 м и 2 м, расстояние между их основаниями равно 2,4 м, а отрезок AB не пересекает плоскость.
30. Верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных на расстояние 3,4 м, соединены перекладиной. Высота одного столба 5,8 м, а другого 3,9 м. Найдите длину перекладины.
31. Расстояния от точки A до вершин квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.
32. Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости тре-

угольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон треугольника.

33. К плоскости треугольника из центра вписанной в него окружности радиуса 0,7 м восставлен перпендикуляр длиной 2,4 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

34. Расстояние от данной точки до плоскости треугольника равно 1,1 м, а до каждой из его сторон 6,1 м. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

35. Из вершины равностороннего треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до стороны BC, если $AD = 13$ см, $BC = 6$ см.

36. Через конец A отрезка AB длины b проведена плоскость, перпендикулярная отрезку, и в этой плоскости проведена прямая. Найдите расстояние от точки B до прямой, если расстояние от точки A до прямой равно a.

37. Расстояния от точки A до всех сторон квадрата равны a. Найдите расстояние от точки A до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна d.

38. Из вершины квадрата восставлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны a и b ($a < b$). Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата.

39. Из вершины прямоугольника восставлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин прямоугольника равны a, b, c ($a < c$, $b < c$). Найдите длину перпендикуляра и стороны прямоугольника.

40. Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого угла, удалена от вершины угла на расстояние a, а от его сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

41. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ восставлен перпендикуляр AK к его плоскости, расстояния от конца K которого до других вершин равны 6 м, 7 м и 9 м. Найдите длину перпендикуляра AK.

42. Из данной точки к плоскости проведены две равные наклонные длиной 2 м. Найдите расстояние от точки до плоскости, если наклонные образуют угол $60°$, а их проекции перпендикулярны.

43. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние 1 м, проведены две равные наклонные. Найдите расстояние между основаниями наклонных, если известно, что наклонные перпендикулярны и образуют с перпендикуляром к плоскости углы, равные $60°$.

44. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость, параллельная

гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу.

45. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 м от противолежащей стороны. Проекции диагоналей на эту плоскость равны 8 м и 2 м. Найдите проекции сторон.

46. Стороны равностороннего треугольника равны 3 м. Найдите расстояние до плоскости треугольника от точки, которая находится на расстоянии 2 м от каждой из его вершин.

47. Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 м и боковой стороной 5 м. Из центра вписанного круга восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2 м. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

48. В равнобедренном треугольнике основание и высота равны 4 м. Данная точка находится на расстоянии 6 м от плоскости треугольника и на равном расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

49. Из концов отрезка AB, параллельного плоскости, проведены перпендикуляр AC и наклонная BD, перпендикулярная отрезку AB. Чему равно расстояние CD, если $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$?

50. Из вершины острого угла прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите расстояния от точки D до вершин B и C, если $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$.

51. Из вершины прямого угла C треугольника ABC восставлен перпендикуляр CD к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы треугольника, если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

52. Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

53. Даны прямая a и плоскость α. Докажите, что все прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости, перпендикулярной плоскости α.

54. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если: 1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м; 2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м; 3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м; 4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$; 6) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$.

55. Точка находится на расстояниях a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

56. Из вершин A и B равностороннего треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $AB = 2$ м, $CA_1 = 3$ м, $CB_1 = 7$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

57. Из вершин A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC восставлены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к плоскости треугольника. Найдите расстояние от вершины C до середины отрезка A_1B_1, если $A_1C = 4$ м, $A_1A = 3$ м, $B_1C = 6$ м, $B_1B = 2$ м и отрезок A_1B_1 не пересекает плоскость треугольника.

58. Плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости α взята точка A, расстояние от которой до прямой c (линии пересечения плоскостей) равно 0,5 м. В плоскости β проведена прямая b, параллельная прямой c и отстоящая на 1,2 м от нее. Найдите расстояние от точки A до прямой b.

59. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая $a \parallel c$, в плоскости β — прямая $b \parallel c$. Найдите расстояние между прямыми a и b, если расстояние между прямыми a и c равно 1,5 м, а между прямыми b и c 0,8 м.

60. Через точку A прямой a проведены перпендикулярные ей плоскость β и прямая b. Докажите, что прямая b лежит в плоскости β.

§ 17. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

ВВЕДЕНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Возьмем три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, пересекающиеся в одной точке O (рис. 246). Проведем через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy. Две другие плоскости называются соответственно xz и yz. Прямые x, y, z называются *координатными осями* (или *осями координат*), точка их пересечения O — *началом координат*, а плоскости xy, yz и xz — *координатными плоскостями*. Точка O разбивает каждую из осей координат на две полупрямые. Условимся одну из них называть положительной, а другую — отрицательной.

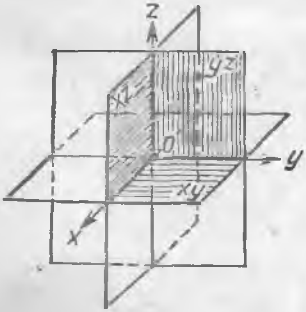


Рис. 246

Возьмем теперь произвольную точку A и проведем через нее плоскость, параллельную плоскости yz (рис. 247). Она пересечет ось x в некоторой точке A_x. *Координатой x* точки A будем называть число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x: положительное, если точка A_x лежит на положительной полуоси x, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с точкой O, то полагаем $x = 0$. Аналогично определяются координаты y и z точки A. Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки: $A\ (x,\ y,\ z)$. Иногда будем обозначать точку просто ее координатами (x, y, z).

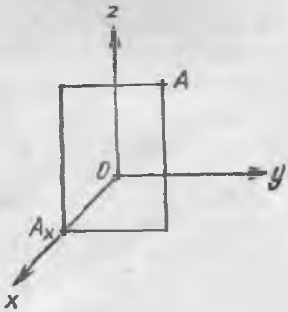


Рис. 247

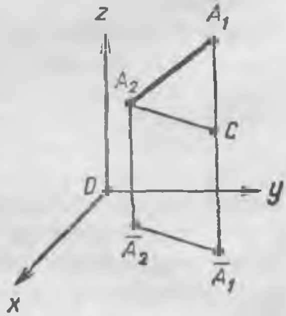


Рис. 248

Задача (1). Даны точки $A\,(1,\ 2,\ 3)$, $B\ (0,\ 1,\ 2)$, $C\ (0,\ 0,\ 3)$, $D\ (1,\ 2,\ 0)$. Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?

Решение. У точек плоскости xy координата z равна нулю. Поэтому только точка D лежит в плоскости xy. У точек плоскости yz координата x равна нулю. Следовательно, точки B и C лежат в плоскости yz. У точек на оси z две координаты (x и y) равны нулю. Поэтому точка C лежит на оси z.

Выразим расстояние между двумя точками $A_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $A_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ через координаты этих точек.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая A_1A_2 не параллельна оси z (рис. 248). Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$. Эти точки имеют те же координаты x, y, что и точки A_1, A_2, а координата z у них равна нулю. Проведем теперь плоскость через точку A_2, параллельную плоскости xy. Она пересечет прямую $A_1\bar{A}_1$ в некоторой точке C. По теореме Пифагора

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

Отрезки CA_2 и $\bar{A}_1\bar{A}_2$ равны, а

$$\bar{A}_1\bar{A}_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Длина отрезка A_1C равна $|z_1 - z_2|$. Поэтому

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Если отрезок A_1A_2 параллелен оси z, то $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Тот же результат дает и полученная формула, так как в этом случае $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

З а д а ч а (4). В плоскости xy найдите точку $D\ (x, y, 0)$, равноудаленную от трех данных точек: $A\ (0, 1, -1)$, $B\ (-1, 0, 1)$, $C\ (0, -1, 0)$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2,$$
$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2,$$
$$CD^2 = (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 0)^2.$$

Приравнивая первые два расстояния третьему, получим два уравнения для определения x и y:

$$-4y + 1 = 0,\ \ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Отсюда $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Искомая точка $D\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

Пусть $A_1\ (x_1, y_1, z_1)$ и $A_2\ (x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки. *Выразим координаты x, y, z середины C отрезка A_1A_2 через координаты его концов A_1 и A_2* (рис. 249). Для этого проведем через точки A_1, A_2 и C прямые, параллельные оси z. Они пересекут плоскость xy в точках $\bar{A}_1\ (x_1, y_1, 0)$, $\bar{A}_2\ (x_2, y_2, 0)$ и $\bar{C}\ (x, y, 0)$. По теореме Фалеса точка $\bar{C}$ является серединой отрезка $\bar{A}_1\bar{A}_2$. А мы знаем, что на плоскости xy координаты середины отрезка выражаются через координаты его концов по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Для того чтобы найти выражение для z, достаточно вместо плоскости xy взять плоскость xz или yz. При этом для z получается аналогичная формула:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

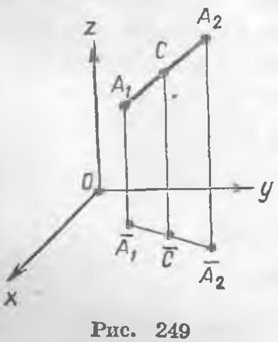


Рис. 249

З а д а ч а (8). Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\ (1, 3, 2)$, $B\ (0, 2, 4)$, $C\ (1, 1, 4)$, $D\ (2, 2, 2)$ — параллелограмм.

Р е ш е н и е. Как мы знаем, четырехугольник, у которого диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, есть параллелограмм. Воспользуемся этим для решения задачи. Координатами середины отрезка AC будут:

$$x = \frac{1+1}{2} = 1, \quad y = \frac{3+1}{2} = 2, \quad z = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Координатами середины отрезка BD будут:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \quad y = \frac{2+2}{2} = 2, \quad z = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Мы видим, что координаты середин отрезков AC и BD одинаковы. Значит, эти отрезки пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

Понятие преобразования для фигур в пространстве определяется так же, как и на плоскости (§ 9). Так же, как и на плоскости, определяются преобразования симметрии относительно точки и прямой и гомотетия.

Кроме симметрий относительно точки и прямой в пространстве рассматривают преобразование симметрии относительно плоскости. Это преобразование состоит в следующем (рис. 250). Пусть α — произвольная фиксированная плоскость. Из точки X фигуры опускаем перпендикуляр $X\bar{X}$ на плоскость α и на его продолжении за точку $\bar{X}$ откладываем отрезок $\bar{X}X'$, равный $X\bar{X}$. Преобразование, которое переводит точку X в *симметричную* ей точку X', называется преобразованием симметрии относительно плоскости α. Если преобразование симметрии относительно плоскости α переводит фигуру в себя, то фигура называется *симметричной относительно плоскости* α, а плоскость α называется *плоскостью симметрии*.

Задача (15). Даны точки (1, 2, 3), (0, —1, 2), (1, 0, —3). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

Решение. Точка, симметричная точке (1, 2, 3) относительно плоскости xy, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости xy. Поэтому у нее те же координаты x и y: $x = 1$, $y = 2$. Симметричная точка находится на том же расстоянии от плоскости xy. Поэтому координата z у нее отличается только знаком, т. е. $z = -3$. Итак, точка, симметричная точке (1, 2, 3) относительно плоскости xy, будет (1, 2, —3). Для других точек и других координатных плоскостей решение аналогично.

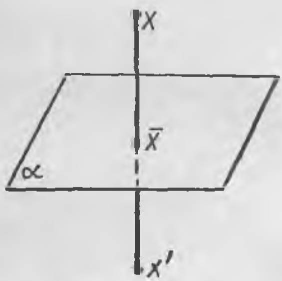


Рис. 250

Так же, как и на плоскости, определяется понятие движения в пространстве. А именно: *движением* называется

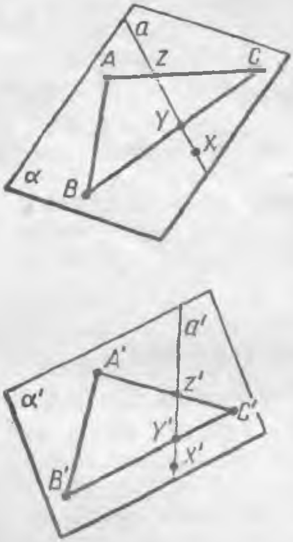


Рис. 251

преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками. ***Преобразования симметрии относительно точки, прямой и плоскости в пространстве являются движениями.***

Дословно так же, как и для движения на плоскости, доказывается, что при движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки и сохраняются углы между полупрямыми.

Новым свойством движения в пространстве является то, что ***движение переводит плоскости в плоскости.*** Докажем это свойство.

Пусть α — произвольная плоскость (рис. 251). Отметим на ней любые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. При движении они перейдут в три точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой. Проведем через них плоскость α'. Докажем, что при рассматриваемом движении плоскость α переходит в плоскость α'. Пусть X — произвольная точка плоскости α. Проведем через нее какую-нибудь прямую a в плоскости α, пересекающую треугольник ABC в двух точках Y и Z. Прямая a перейдет при движении в некоторую прямую a'. Точки Y и Z прямой a перейдут в точки Y' и Z', принадлежащие треугольнику $A'B'C'$, а значит, плоскости α'. Итак, прямая a' лежит в плоскости α'. Точка X при движении переходит в точку X' прямой a', а значит, и плоскости α'. Утверждение доказано.

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка (x, y, z) фигуры переходит в точку $(x + a,\ y + b,\ z + c)$, где a, b, c — постоянные. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка (x, y, z) при параллельном переносе. Так же, как и на плоскости, доказываются следующие свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос есть движение.

2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).

4. Каковы бы ни были точки A и A', существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

5. Два параллельных переноса, выполненные последовательно, дают параллельный перенос.

6. Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос.

Задача (17). Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A (1, 0, 2) переходит в точку A' (2, 1, 0).

Решение. Подставляя в формулы параллельного переноса координаты точек A и A', т. е. $x=1$, $y=0$, $z=2$, $x'=2$, $y'=1$, $z'=0$, получим уравнения, из которых определяются a, b, c:

$$2 = 1 + a,\ 1 = 0 + b,\ 0 = 2 + c.$$

Отсюда $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.

Новым для параллельного переноса в пространстве является следующее свойство:

7. *При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.*

Доказательство. Пусть α — произвольная плоскость. Проведем в этой плоскости две пересекающиеся прямые a и b. При параллельном переносе прямые a и b переходят либо в себя, либо в параллельные прямые a' и b'. Плоскость α переходит в некоторую плоскость α', проходящую через прямые a' и b'. Если плоскость α' не совпадает с α, то по теореме 15.4 она параллельна α. Утверждение доказано.

Так же, как и на плоскости, определяются гомотетия и преобразование подобия в пространстве. Дословно так же, как и на плоскости, доказывается, что гомотетия в пространстве является преобразованием подобия.

УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ

Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется *углом между прямыми*. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90° по определению. Угол между параллельными прямыми считаем равным нулю.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися параллельными им прямы-

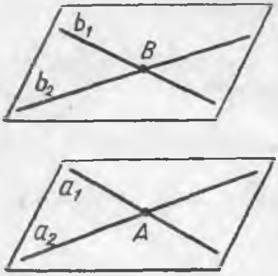


Рис. 252

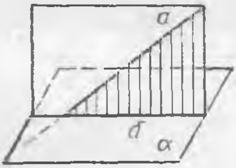


Рис. 253

ми. Этот угол не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые. Докажем это.

Пусть a_1 и a_2 — пересекающиеся в точке A прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым (рис. 252). Пусть b_1 и b_2 — другие, пересекающиеся в точке B прямые, параллельные данным. По теореме 15.2 прямые a_1 и b_1 параллельны (или совпадают) и прямые a_2 и b_2 параллельны (или совпадают). Выполним параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B. Так как при параллельном переносе каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую, то указанный параллельный перенос переводит прямую a_1 в прямую b_1, а прямую a_2 в прямую b_2. Так как параллельный перенос сохраняет величину угла, то угол между прямыми a_1 и a_2 равен углу между прямыми b_1 и b_2. А это и требовалось доказать.

По данному ранее определению перпендикулярными называются прямые, пересекающиеся под прямым углом. Однако иногда скрещивающиеся прямые тоже называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Определим понятие *угла между прямой и плоскостью*. Пусть α — плоскость и a — пересекающая ее прямая (рис. 253). Основания перпендикуляров, опущенных из точек прямой a на плоскость α, лежат на прямой $\bar{a}$. Эта прямая называется *проекцией* прямой a на плоскость α. *Углом между прямой и плоскостью* называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Угол между параллельными прямой и плоскостью считается равным нулю, а угол между перпендикулярными прямой и плоскостью — равным 90°. Так как прямая a, ее проекция $\bar{a}$ на плоскость α и перпендикуляр к плоскости α в точке ее пересечения с прямой a лежат в одной плоскости, то *угол между прямой и плоскостью дополняет до 90° угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости*.

Задача (20). Точка A отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°, 2) 45°, 3) 60°.

Решение. Опустим перпендикуляр AA' на плоскость (рис. 254). Треугольник $AA'B$ — прямоугольный с прямым углом при вершине A'. Острый угол этого треугольника, противолежащий катету AA', равен 30° (соответственно 45°,

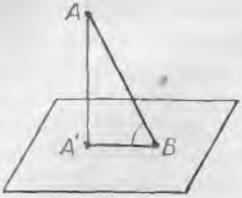


Рис. 254

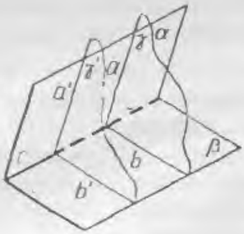


Рис. 255

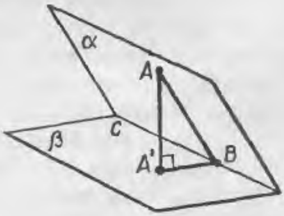


Рис. 256

60°). Поэтому в первом случае наклонная $AB = \frac{AA'}{\sin 30°} = 2h$. Во втором случае $AB = h\sqrt{2}$, в третьем $AB = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

Определим понятие *угла между плоскостями*. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется *углом между данными плоскостями* (рис. 255). Определяемый так угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости. Докажем это.

Пусть α и β — данные плоскости, пересекающиеся по прямой c. Проведем плоскость γ, перпендикулярную прямой c. Она пересечет плоскости α и β по прямым a и b. Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b. Возьмем другую секущую плоскость γ', перпендикулярную прямой c. Пусть a' и b' — прямые пересечения этой плоскости с плоскостями α и β. Выполним параллельный перенос, при котором точка пересечения плоскости γ с прямой c переходит в точку пересечения плоскости γ' с прямой c. При этом параллельном переносе прямая a переходит в прямую a', а прямая b — в прямую b'. Это значит, что углы между прямыми a и b, a' и b' равны. Утверждение доказано.

Задача (24). Две плоскости пересекаются под углом 30°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

Решение. Пусть α и β — данные плоскости и A — точка, лежащая в плоскости α (рис. 256). Опустим перпендикуляр AA' на плоскость β и перпендикуляр AB на прямую c, по которой пересекаются плоскости. По теореме о трех перпендикулярах $A'B \perp c$. Угол при вершине B прямоугольного треугольника ABA' равен 30°. Имеем:

$$AB = \frac{AA'}{\sin 30°} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

Расстояние от точки A до прямой c равно $2a$.

ПЛОЩАДЬ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

Ортогональной проекцией фигуры на данную плоскость называется ее параллельная проекция в направлении, перпендикулярном этой плоскости.

Теорема 17.1. ***Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.***

Доказательство. Рассмотрим сначала треугольник и его проекцию на плоскость, проходящую через одну из его сторон (рис. 257). Проекцией треугольника ABC является треугольник ABC_1 в плоскости α. Проведем высоту CD треугольника. По теореме о трех перпендикулярах отрезок C_1D — высота треугольника ABC_1. Угол CDC_1 равен углу между плоскостью треугольника ABC и плоскостью проекции α. Имеем: $C_1D = CD \cdot \cos\varphi$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD, \quad S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D.$$

Отсюда
$$S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC} \cos\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема верна. Теорема верна и в случае, когда вместо плоскости α взята любая параллельная ей плоскость. Действительно, при проектировании фигуры на параллельные плоскости ее проекции совмещаются параллельным переносом в направлении проектирования. А совмещаемые параллельным переносом фигуры равны.

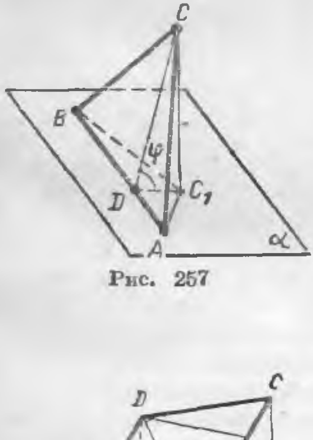


Рис. 257

Рассмотрим теперь общий случай. Разобьем данный многоугольник на треугольники. Каждый треугольник, у которого нет стороны, параллельной плоскости проекции, мы разобьем на два треугольника с общей стороной, параллельной плоскости проекции, как это показано для четырехугольника $ABCD$ на рисунке 258.

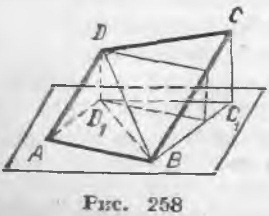


Рис. 258

Теперь для каждого треугольника $\triangle$ нашего разбиения и его проекции $\overline{\triangle}$ запишем равенство $S_{\overline{\triangle}} = S_{\triangle} \cos\varphi$. Сложим все эти равенства почленно. Тогда получим слева площадь проекции многоугольника, а справа площадь самого многоугольника, умноженную на $\cos\varphi$. Теорема доказана.

ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве, как и на плоскости, *вектором* называется направленный отрезок. Буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.

Координатами вектора с началом в точке A_1 (x_1, y_1, z_1) и концом в точке A_2 (x_2, y_2, z_2) называются числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Так же, как и на плоскости, доказывается, что равные векторы имеют соответственно равные координаты, и обратно, векторы с соответственно равными координатами равны. Это дает основание для обозначения вектора его координатами: $\bar{a}$ (a_1, a_2, a_3) или просто $\overline{(a_1, a_2, a_3)}$.

З а д а ч а (32). Даны четыре точки: A $(2, 7, -3)$, B $(1, 0, 3)$, C $(-3, -4, 5)$, D $(-2, 3, -1)$. Укажите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

Р е ш е н и е. Надо найти координаты указанных векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... и сравнить соответствующие координаты. У равных векторов соответствующие координаты равны. Например, у вектора $\overline{AB}$ координаты: $1 - 2 = -1$, $0 - 7 = -7$, $3 - (-3) = 6$. У вектора $\overline{DC}$ такие же координаты: $-3 - (-2) = -1$, $-4 - 3 = -7$, $5 - (-1) = 6$. Таким образом, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ равны. Другой парой равных векторов будут $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$.

Так же, как и на плоскости, определяются действия над векторами: сложение, умножение на число и скалярное произведение.

Суммой векторов $\bar{a}$ (a_1, a_2, a_3) и $\bar{b}$ (b_1, b_2, b_3) называется вектор $\bar{c}$ $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Так же, как и на плоскости, доказывается векторное равенство $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Произведением вектора $\bar{a}$ (a_1, a_2, a_3) на число λ называется вектор $\lambda\bar{a} = \overline{(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)}$. Так же, как и на плоскости, доказывается, что абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\ |\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda < 0$

З а д а ч а (35). Дан вектор $\bar{a}$ $(1, 2, 3)$. Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке A $(1, 1, 1)$ и концом B на плоскости xy.

Р е ш е н и е. Координата z точки B равна нулю. Координаты вектора $\overline{AB}$: $x - 1$, $y - 1$, $0 - 1 = -1$. Из коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\overline{AB}$ получаем пропорцию

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{3}.$$

Отсюда находим координаты x, y точки B:

$$x = \frac{2}{3}, \qquad y = \frac{1}{3}.$$

Скалярным произведением векторов $(\overline{a_1, a_2, a_3})$ и $(\overline{b_1, b_2, b_3})$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Буквально так же, как и на плоскости, доказывается, что скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

Задача (40). Даны четыре точки: $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, -3, 1)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение. Координатами вектора $\overline{AB}$ будут:

$$1 - 0 = 1, \quad -1 - 1 = -2, \quad 2 - (-1) = 3;$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Координатами вектора $\overline{CD}$ будут $2-3=-1$, $-3-1=-4$, $1-0=1$;

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18}.$$

Значит,

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}|\,|\overline{CD}|} = \frac{1 \cdot (-1) + (-2)(-4) + 3 \cdot 1}{\sqrt{14}\ \sqrt{18}} = \frac{5}{\sqrt{63}}.$$

Подобно тому как для векторов на плоскости, в пространстве имеет место разложение

$$\bar{a}\,(a_1, a_2, a_3) = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3,$$

где $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ — единичные векторы, имеющие направления координатных осей. Действительно,

$$(\overline{a_1, a_2, a_3}) = (\overline{a_1, 0, 0}) + (\overline{0, a_2, 0}) + (\overline{0, 0, a_3}) =$$
$$= a_1(\overline{1, 0, 0}) + a_2(\overline{0, 1, 0}) + a_3(\overline{0, 0, 1}) = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3.$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Составим уравнение плоскости. Пусть $A_0(x_0, y_0, z_0)$ — какая-нибудь точка плоскости и $\bar{n}(a, b, c)$ — вектор, перпендикулярный плоскости (рис. 259). Пусть $A(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости. Векторы $\overline{A_0A}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны. Поэтому их скалярное произведение равно нулю. Координаты вектора $\overline{A_0A}$ равны $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Так как $\overline{A_0A} \cdot \bar{n} = 0$, то

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (*)$$

Обратно, если точка $A(x, y, z)$ удовлетворяет этому уравнению, то $\overline{A_0A} \cdot \bar{n} = 0$. А значит, точка A лежит в плоскости. Таким образом, *уравнение* (*) *есть уравнение нашей плоскости.*

Заметим, что ***коэффициенты a, b, c в уравнении плоскости***

$$ax + by + cz + d = 0$$

являются координатами вектора, перпендикулярного плоскости.

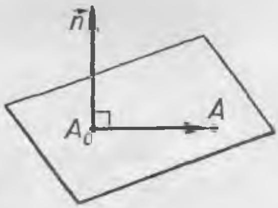


Рис. 259

З а д а ч а (49). Даны точки $A(1, 2, 3)$ и $B(0, 1, -1)$. Найдите уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB.

Р е ш е н и е. Вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен плоскости. Его координатами будут $-1, -1, -4$. Поэтому уравнение плоскости можно записать так: $(-1)x+(-1)y+(-4)z+d=0$. Так как точка A лежит в плоскости, то ее координаты должны удовлетворять этому уравнению:

$$(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-4)\cdot 3 + d = 0.$$

Отсюда $d = 15$. Уравнение искомой плоскости:

$$-x - y - 4z + 15 = 0.$$

Как мы знаем, любая прямая полностью определяется, если заданы две плоскости, проходящие через эту прямую. Отсюда следует, что любая прямая в пространстве задается двумя линейными уравнениями—уравнениями плоскостей, проходящих через эту прямую:

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0,$$
$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0.$$

Точка (x, y, z), удовлетворяющая этим двум уравнениям, принадлежит каждой из плоскостей, а значит, принадлежит прямой. Обратно, координаты каждой точки прямой удовлетворяют обоим уравнениям, так как точка принадлежит каждой из плоскостей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Где лежат те точки пространства, для которых координаты x и y равны нулю?
2. Выразите расстояние между двумя точками через координаты этих точек.
3. Выведите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.
4. Что такое преобразование симметрии относительно точки? Какая фигура называется центрально-симметричной?
5. Объясните, что такое преобразование симметрии относительно плоскости. Что такое плоскость симметрии фигуры?
6. Какое преобразование фигуры называется движением?

7. Докажите, что преобразование симметрии относительно точки есть движение.
8. Докажите, что преобразование симметрии относительно координатной плоскости xy задается формулами $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$. Докажите, что преобразование симметрии относительно плоскости есть движение.
9. Докажите, что движение в пространстве переводит плоскость в плоскость.
10. Дайте определение параллельного переноса.
11. Докажите, что при параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную плоскость.
12. Дайте определение угла между прямыми.
13. Докажите, что угол φ между прямыми, содержащими векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, определяется из уравнения

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cdot \cos \varphi.$$

14. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
15. Дайте определение угла между плоскостями.
16. Что такое ортогональная проекция фигуры на плоскость?
17. Докажите, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.
18. Дайте определение координат вектора с началом в точке $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2, y_2, z_2)$.
19. Что такое абсолютная величина вектора? Какие векторы называются одинаково направленными?
20. Дайте определения действий над векторами: сложения, умножения на число, скалярного произведения.
21. Докажите, что любой вектор $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ можно представить в виде $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3$, где $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$—единичные векторы, имеющие направления координатных осей.
22. Выведите уравнение плоскости.
23. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты a, b, c в уравнении плоскости $ax + by + cz + d = 0$?
24. Какими уравнениями задается прямая в пространстве?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны точки A (1, 2, 3), B (0, 1, 2), C (0, 0, 3), D (1, 2, 0). Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости xy; 2) на оси z; 3) в плоскости yz?
2. Дана точка A (1, 2, 3). Найдите основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.

3. Найдите расстояния от точки $(1, 2, -3)$ до: 1) координатных плоскостей, 2) осей координат, 3) начала координат.
4. В плоскости xy найдите точку $D(x, y, 0)$, равноудаленную от трех данных точек: $A(0, 1, -1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, -1, 0)$.
5. Найдите точки, равноотстоящие от точек $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ и отстоящие от плоскости yz на расстояние 2.
6. На оси x найдите точку $C(x, 0, 0)$, равноудаленную от двух точек $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 1, 3)$.
7. Составьте уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки $A(1, 2, 3)$ и начала координат.
8. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(1, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 1, 4)$, $D(2, 2, 2)$ есть параллелограмм.
9. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: 1) $A(0, 2, -3)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(2, -2, -1)$, $D(3, -1, -5)$; 2) $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, 7)$, $C(-2, 1, 5)$, $D(-1, 2, 1)$.
10. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, если: 1) $A(6, 7, 8)$, $B(8, 2, 6)$, $C(4, 3, 2)$, $D(2, 8, 4)$; 2) $A(0, 2, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(2, 0, 2)$, $D(1, 2, 2)$.
11. Даны один конец отрезка $A(2, 3, -1)$ и его середина $C(1, 1, 1)$. Найдите второй конец отрезка $B(x, y, z)$.
12. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех других его вершин известны: 1) $A(2, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(4, 1, 0)$; 2) $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-1, 0, 1)$; 3) $A(4, 2, -1)$, $B(1, -3, 2)$, $C(-4, 2, 1)$.
13. Докажите, что середина отрезка с концами в точках $A(a, c, -b)$ и $B(-a, d, b)$ лежит на оси y.
14. Докажите, что середина отрезка с концами в точках $C(a, b, c)$ и $D(p, q, -c)$ лежит в плоскости xy.
15. Даны точки $(1, 2, 3)$, $(0, -1, 2)$, $(1, 0, -3)$. Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.
16. Даны точки $(1, 2, 3)$, $(0, -1, 2)$, $(1, 0, -3)$. Найдите точки, симметричные им относительно начала координат.
17. Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка $A(1, 0, 2)$ переходит в точку $A'(2, 1, 0)$.
18. При параллельном переносе точка $A(2, 1, -1)$ переходит в точку $A'(1, -1, 0)$. В какую точку переходит начало координат?

19. Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C — в точку D, если: 1) $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(3, -2, 1)$, $D(2, -3, 0)$; 2) $A(-2, 3, 5)$, $B(1, 2, 4)$, $C(4, -3, 6)$, $D(7, -2, 5)$; 3) $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, -2, 2)$, $D(2, -3, 1)$; 4) $A(1, 1, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(-2, 2, 1)$, $D(1, 1, 1)$?

20. Точка A отстоит от плоскости на расстояние h. Найдите длины наклонных, проведенных из нее под следующими углами к плоскости: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$.

21. Наклонная равна a. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью угол, равный: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $30°$?

22. Отрезок длиной 10 м пересекает плоскость; концы его находятся на расстояниях 2 м и 3 м от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

23. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол $60°$. Общее основание равно 16 м; боковая сторона одного треугольника 17 м, а боковые стороны другого перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.

24. Две плоскости пересекаются под углом $30°$. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстояние a. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

25. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в разных плоскостях, угол между которыми равен α. Найдите $\cos\alpha$, если: 1) $AB = 24$ м, $AC = 13$ м, $AD = 37$ м, $CD = 35$ м; 2) $AB = 32$ м, $AC = 65$ м, $AD = 20$ м, $CD = 63$ м.

26. Найдите угол между плоскостями, если точка, взятая на одной из них, отстоит от прямой пересечения плоскостей вдвое дальше, чем от второй плоскости.

27. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в $45°$ и $30°$, а между собой прямой угол Найдите расстояние между концами наклонных.

28. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы $45°$, а между собой угол $60°$. Найдите расстояние между концами наклонных.

29. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом $45°$ ко второму катету. Найдите угол между гипотенузой и плоскостью.

30. Из точки, отстоящей от плоскости на a, проведены две наклонные под углом $30°$ к плоскости, причем их проекции образуют угол $120°$. Найдите расстояние между концами наклонных.

31. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 м и 24 м. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30° с плоскостью треугольника.

32. Даны четыре точки: $A (2, 7, -3)$, $B (1, 0, 3)$, $C (-3, -4, 5)$, $D (-2, 3, -1)$. Укажите среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ равные векторы.

33. Даны три точки: $A (1, 0, 1)$, $B (-1, 1, 2)$, $C (0, 2, -1)$. Найдите точку $D (x, y, z)$, если известно, что: 1) векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны; 2) сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна нулю.

34. При каких значениях m и n данные векторы коллинеарны: 1) $\bar{a} (2, n, 3)$, $\bar{b} (3, 2, m)$; 2) $\bar{a} (m, 2, 5)$, $\bar{b} (1, -1, n)$; 3) $\bar{a} (m, n, 2)$, $\bar{b} (6, 9, 3)$?

35. Дан вектор $\bar{a} (1, 2, 3)$. Найдите коллинеарный ему вектор с началом в точке $A (1, 1, 1)$ и концом B на плоскости xy.

36. При каком значении n данные векторы перпендикулярны: 1) $\bar{a} (2, -1, 3)$, $\bar{b} (1, 3, n)$; 2) $\bar{a} (n, -2, 1)$, $\bar{b} (n, -n, 1)$; 3) $\bar{a} (n, -2, 1)$, $\bar{b} (n, 2n, 4)$; 4) $\bar{a} (4, 2n, -1)$, $\bar{b} (-1, 1, n)$?

37. Даны три точки: $A (1, 0, 1)$, $B (-1, 1, 2)$, $C (0, 2, -1)$. Найдите на оси z такую точку $D (0, 0, c)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были перпендикулярны.

38. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 60°, а вектор $\bar{c}$ им перпендикулярен. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

39. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ единичной длины образуют попарно углы 60°. Найдите угол φ между векторами 1) $\bar{a}$ и $\bar{b} + \bar{c}$; 2) $\bar{a}$ и $\bar{b} - \bar{c}$.

40. Даны четыре точки: $A (0, 1, -1)$, $B (1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, -3, 1)$. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

41. Даны три точки: $A (0, 1, -1)$, $B (1, -1, 2)$, $C (3, 1, 0)$. Найдите косинус угла C треугольника ABC.

42. Из вершины A треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$, если угол ABD равен α, а угол ABC равен β.

43. Наклонная образует угол 45° с плоскостью. Через основание наклонной проведена прямая в плоскости под углом 45° к проекции наклонной. Найдите угол φ между этой прямой и наклонной.

44. Из точки вне плоскости проведены перпендикуляр и две равные наклонные, образующие углы α с перпендикуляром. Найдите угол φ между проекциями наклонных, если угол между наклонными β.

45. Найдите единичный вектор, коллинеарный вектору $\bar{a}$ (2, 1, —2).

46. Даны две точки: A (1, 0, 2) и B (—1, 1, 1). Найдите координаты единичного вектора $\bar{e}$ (a, b, c), коллинеарного вектору $\overline{AB}$ и одинаково с ним направленного.

47. При каком условии вектор $\bar{a}$ (a_1, a_2, a_3) параллелен оси z?

48. При каком условии плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$, параллельна плоскости xy?

49. Даны точки A (1, 2, 3) и B (0, 1, —1). Найдите уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB.

50. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой AB, если: 1) A (—1, 1, 2), B(2, 0, 1); 2) A (1, 0, —1), B(4, 3, —3); 3) A (3, —4, 5), B (2, 1, 2).

51. Найдите отрезки, которые плоскость $ax + by + cz + d = 0$ отсекает на осях координат, если a, b, c, d не равны нулю.

52. Докажите, что прямая пересечения плоскостей, заданных уравнениями $a_1x + b_1y = d_1$, $a_2x + b_2y = d_2$, параллельна оси z.

53. Докажите, что плоскости, заданные уравнениями $ax + by + cz + d = 0$, $ax + by + cz + d_1 = 0$, не имеют общих точек, если $d \neq d_1$.

54. Докажите, что любая плоскость, параллельная плоскости $ax + by + cz + d = 0$, задается уравнением вида $ax + by + cz + d' = 0$, где $d' \neq d$.

55. Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Какому условию должны удовлетворять координаты точки P (k, l, m), чтобы прямая, проходящая через эту точку и начало координат, была перпендикулярна плоскости?

56. Дана точка P (k, l, m). Найдите уравнение плоскости, которая проходит через начало координат O и перпендикулярна прямой OP.

57. Найдите точку пересечения трех плоскостей, заданных уравнениями:
1) $x + y + z = 1$, $x - 2y = 0$, $2x + y + 3z + 1 = 0$;
2) $x - y = 3$, $y + z = 2$, $x - z = 4$;
3) $x + 2 = 0$, $2x - y = 3$, $3x + 2y - z = 8$;
4) $x + 2y + 3z = 1$, $3x + y + 2z = 2$, $2x + 3y + z = 3$.

58. Докажите, что плоскости, заданные уравнениями $x + y + z = 1$, $2x + y + 3z + 1 = 0$, $x + 2z + 1 = 0$, не имеют ни одной общей точки.

59. При каком условии плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$, 1) параллельна оси z; 2) проходит через ось z?
60. При каком условии плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$, перпендикулярна плоскости xy?
61. Плоскость задана уравнением $2x + 3y + z = 1$. Укажите какой-нибудь вектор, параллельный плоскости.
62. Прямая является пересечением плоскостей $2x + 3y + z = 1$, $x + y + z = 1$. Укажите какой-нибудь вектор, параллельный прямой.

10 класс

§ 18. МНОГОГРАННИКИ

МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (рис. 260). Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая — *ребром* двугранного угла.

Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется *линейным углом* двугранного угла. За меру двугранного угла принимается мера соответствующего ему линейного угла. Все линейные углы двугранного угла совмещаются параллельным переносом, а значит, равны. Поэтому *мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.*

Задача (1). Из точек A и B, лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α (рис. 261).

Решение. Проведем прямые $A_1C \parallel BB_1$ и $BC \parallel A_1B_1$. Прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости треугольника AA_1C, так как она перпендикулярна двум прямым в этой плоскости AA_1 и CA_1. Следовательно, параллельная ей прямая BC тоже перпендикулярна этой плоскости. Значит, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. По теореме косинусов

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

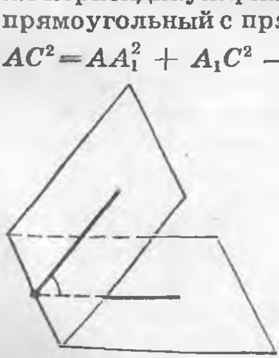


Рис. 260

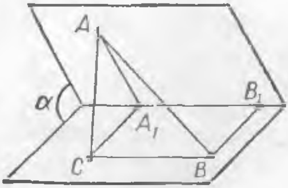


Рис. 261

Рис. 262

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \\ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}.$$

Трехгранным углом (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов: (ab), (bc) и (ac) (рис. 262). Эти углы называются *гранями* трехгранного угла, а их стороны — *ребрами*. Общая вершина плоских углов называется *вершиной* трехгранного угла. Двугранные углы, образуемые гранями и их продолжениями, называются *двугранными углами трехгранного угла*.

Аналогично определяется понятие *многогранного угла* $(a_1a_2a_3\ \ldots\ a_n)$ — как фигуры, составленной из плоских углов (a_1a_2), (a_2a_3), (a_3a_4), ..., (a_na_1). Для многогранного угла определяются понятия граней, ребер и двугранных углов так же, как и для трехгранного угла (рис. 263).

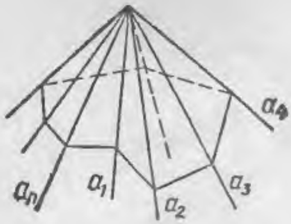


Рис. 263

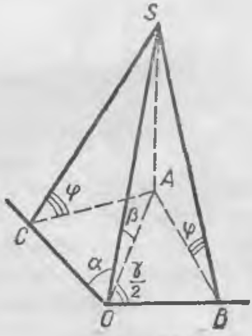


Рис. 264

З а д а ч а (3). У трехгранного угла один плоский угол равен γ $(\gamma < \pi)$, а прилежащие к нему двугранные углы равны $\varphi\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла α и угол β, который образует плоскость угла γ с противолежащим ребром.

Р е ш е н и е. Опустим из произвольной точки S ребра, противолежащего углу γ, перпендикуляр SA на плоскость угла γ и перпендикуляры SB и SC на его стороны (рис. 264). По теореме о трех перпендикулярах отрезки AB и AC перпендикулярны сторонам угла γ. Прямоугольные треугольники SCA и SBA равны по катету и противолежащему углу. Поэтому $AB = AC$. Прямоугольные треугольники AOB и AOC равны по катету и гипотенузе. Поэтому $\angle AOC = \angle AOB = \frac{\gamma}{2}$. Имеем:

$$SC = \frac{AS}{\sin\varphi}, \quad AC = \frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad OA = \frac{AC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi\sin\frac{\gamma}{2}},$$

$$OC = \frac{AC}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SC}{OC} = \frac{\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\sin\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\frac{\gamma}{2}.$$

МНОГОГРАННИК

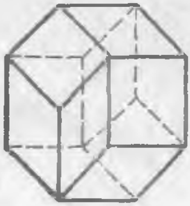


Рис. 265

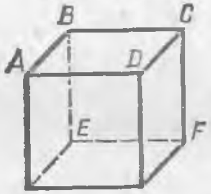


Рис. 266

Многогранником называется тело, ограниченное конечным числом плоскостей. Граница многогранника называется его *поверхностью* (рис. 265).

Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой из ограничивающих плоскостей. Общая часть поверхности выпуклого многогранника и ограничивающей его плоскости называется *гранью*. Стороны граней многогранника называются *ребрами*, а вершины — *вершинами многогранника*.

Поясним данное определение на примере знакомого вам куба (рис. 266). Куб есть выпуклый многогранник. Его поверхность состоит из шести квадратов: $ABCD$, $BEFC$, ... Они являются его гранями. Ребрами куба являются стороны этих квадратов AB, BC, BE, ... Вершинами куба являются вершины квадратов A, B, C, D, E, ... У куба шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин.

ПРИЗМА

Призмой называется многогранник, образованный заключенными между двумя параллельными плоскостями отрезками всех параллельных прямых, которые пересекают плоский многоугольник в одной из плоскостей. Грани призмы, лежащие в этих плоскостях, называются *основаниями призмы*. Другие грани называются *боковыми гранями*. Все боковые грани — параллелограммы. Ребра призмы, соединяющие вершины оснований, называются *боковыми ребрами*. Все боковые ребра призмы параллельны.

На рисунке 267 изображена призма. Она образована отрезками XX' параллельных прямых, пересекающих многоугольник P: $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ в плоскости α. Основаниями призмы являются многоугольник P и равный ему многоугольник P' в плоскости α'. Боковыми гранями призмы являются параллелограммы $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ... Боковыми ребрами призмы являются отрезки A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', ...

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю призмы*. *Диагональным сечением* призмы называется сечение плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани. Призма называется *прямой*, если ее боковые

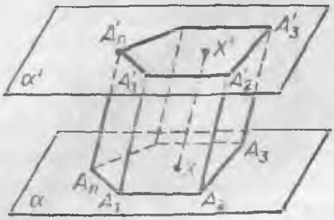


Рис. 267

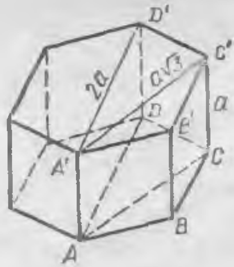


Рис. 268

ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется *наклонной*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основания являются правильными многоугольниками.

Задача (8). Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной a, а боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади ее диагональных сечений.

Решение. Диагональные сечения призмы представляют собой прямоугольники (рис. 268), у которых основаниями являются диагонали оснований призмы, а высотой — высота призмы. Диагонали основания равны: бóльшая $2a$ и меньшая $a\sqrt{3}$. Так как высота призмы равна стороне основания a, то площади диагональных сечений равны $2a^2$ и $a^2\sqrt{3}$. Диагонали призмы являются диагоналями диагональных сечений. По теореме Пифагора диагонали призмы равны $\sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$, $\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$.

Боковой поверхностью призмы (точнее, площадью боковой поверхности) называется сумма площадей боковых граней. *Полная поверхность* призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема 18.1. ***Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, т. е. на длину бокового ребра.***

Доказательство. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники. Основания этих прямоугольников являются сторонами многоугольника, лежащего в основании призмы, а высоты равны длине боковых ребер. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы равна

$$S = a_1 l + a_2 l + \ldots + a_n l = pl,$$

где p — периметр основания призмы, а l — длина боковых ребер. Теорема доказана.

Задача (17). В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все бо-

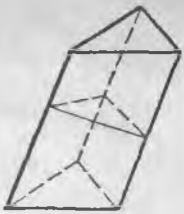


Рис. 269

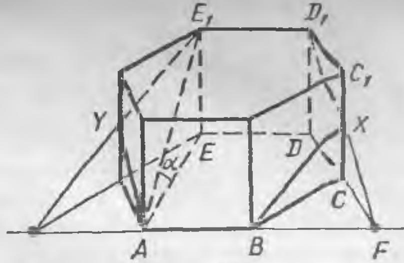


Рис. 270

ковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l

Решение. Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис 269). Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а боковые ребра равны l. Эта призма имеет ту же боковую поверхность, что и исходная. Таким образом, боковая поверхность исходной призмы равна pl.

ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

В стереометрии нередко приходится рассматривать сечения тел, в частности многогранников, различными плоскостями. Мы уже имели дело с такими сечениями в простейших случаях, решая задачи 8 и 17. Обычно задача состоит в том, чтобы построить сечение, имея параллельную проекцию тела. Приведем некоторые соображения, которыми пользуются при построении сечений многогранников.

Прежде всего заметим, что сечение выпуклого многогранника есть выпуклый плоский многоугольник, вершины которого в общем случае являются точками пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника, а стороны — с его гранями.

Для построения прямой пересечения плоскостей обычно находят две ее точки и проводят через них прямую. Для построения точки пересечения прямой и плоскости находят в плоскости прямую, пересекающую данную. Тогда искомая точка получается в пересечении найденной прямой с данной.

Приведем пример, из которого видно, как эти общие соображения применяются.

Задача (9). В правильной шестиугольной призме, у которой боковые грани — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Найдите площадь построенного сечения.

Р е ш е н и е. Сечение проходит через параллельные прямые AB и E_1D_1 (рис 270). Ребра AB и E_1D_1 являются сторонами многоугольника в сечении. Найдем сторону D_1X этого многоугольника, лежащую в грани CC_1D_1D. На прямой D_1X мы знаем одну точку — точку D_1. Другой точкой является точка F пересечения прямых AB и CD. Она лежит в плоскости грани CC_1D_1D и в плоскости сечения, а значит, и на прямой их пересечения D_1X. Соединяя точки D_1 и F прямой, получим точку X. Отрезок D_1X есть сторона сечения в грани CC_1D_1D. Аналогично находим точку Y. Искомый многоугольник в сечении есть $ABXD_1E_1Y$.

Найдем теперь площадь сечения. Шестиугольник в основании призмы является ортогональной проекцией шестиугольника в сечении. Поэтому площадь сечения $S = \frac{S_0}{\cos\alpha}$, где S_0 — площадь основания призмы, а α — угол, который образует секущая плоскость с плоскостью основания.

Так как $EA \perp AB$, то $E_1A \perp AB$ (теорема о трех перпендикулярах). Поэтому $\alpha = \angle EAE_1$. А так как $EE_1 = a$, $AE = a\sqrt{3}$ (сторона правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса a), то $AE_1 = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$. Поэтому $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Площадь основания призмы равна $S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Итак, площадь сечения

$$S = \frac{S_0}{\cos\alpha} = 3a^2.$$

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется *параллелепипедом*. У параллелепипеда все грани — параллелограммы. На рисунке 271, *а* изображен наклонный

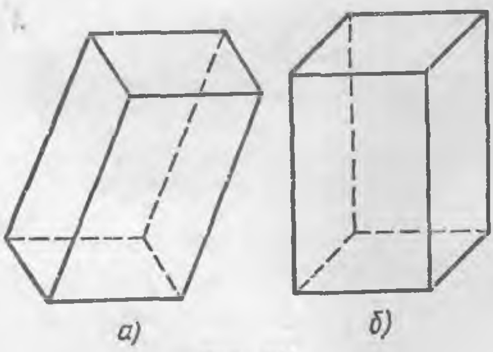


Рис. 271

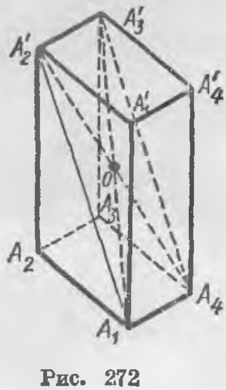


Рис. 272

параллелепипед, а на рисунке 271, *б* — прямой параллелепипед.

Теорема 18.2. ***Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.***

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две диагонали параллелепипеда, например A_1A_3' и A_4A_2' (рис. 272). Так как четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $A_2A_2'A_3'A_3$ — параллелограммы, то четырехугольник $A_4A_1A_2'A_3'$ тоже параллелограмм. Диагонали параллелепипеда A_1A_3' и A_4A_2' являются диагоналями этого параллелограмма. Поэтому они пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам. Аналогично доказывается, что диагонали A_1A_3' и A_2A_4', а также диагонали A_1A_3' и A_3A_1' пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Отсюда заключаем, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

Из теоремы 18.2 следует, что ***точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.***

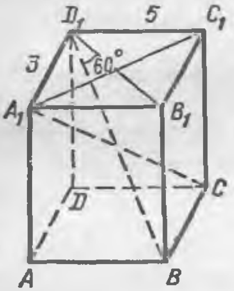


Рис. 273

Задача (24). В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60° (рис. 273).

Решение. Находим вторую диагональ основания. Так как основанием служит параллелограмм, а у параллелограмма сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон, то вторая диагональ основания равна $\sqrt{2\cdot 3^2+2\cdot 5^2-4^2}=\sqrt{52}>4$. Боковое ребро равно $4\operatorname{tg}60°=4\sqrt{3}$. Большая диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{(\sqrt{52})^2+(4\sqrt{3})^2}=10$ (см).

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*.

Теорема 18.3. ***У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.***

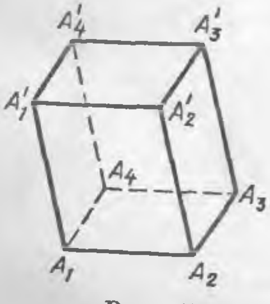


Рис. 274

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда, например

$A_1A_2A_2'A_1'$ и $A_3A_4A_4'A_3'$ (рис. 274). Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то прямая A_1A_2 параллельна прямой A_3A_4, а прямая A_1A_1' параллельна прямой A_4A_4'. Отсюда следует, что плоскости рассматриваемых граней параллельны. Из того, что грани параллелепипеда — параллелограммы, следует, что все отрезки: A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ и A_2A_3 параллельны и равны. Отсюда заключаем, что грань $A_1A_2A_2'A_1'$ совмещается параллельным переносом вдоль ребра A_1A_4 с гранью $A_3A_4A_4'A_3'$. Значит, эти грани равны. Аналогично доказывается параллельность и равенство любых двух противолежащих граней параллелепипеда. Теорема доказана.

З а д а ч а (28). У параллелепипеда три грани имеют площади 1 м², 2 м² и 3 м². Чему равна полная поверхность параллелепипеда?

Р е ш е н и е. Так как у параллелепипеда противолежащие грани равны, а следовательно, имеют равные площади, то у нашего параллелепипеда есть две грани с площадью по 1 м², две грани — по 2 м² и две грани — по 3 м². Так как у параллелепипеда ровно шесть граней, то его полная поверхность равна $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ м².

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом.* У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом.*

Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами.* У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера.

Т е о р е м а 18.4. ***В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его линейных размеров.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 275). Из прямоугольного треугольника $AC'C$ по теореме Пифагора получаем:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

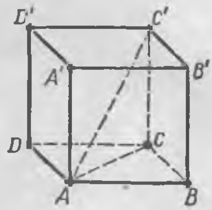


Рис. 275

Из прямоугольного треугольника ACB по теореме Пифагора получаем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Отсюда

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

Ребра AB, BC и CC' не параллельны, а следовательно, их длины являются линейными размерами параллелепипеда. Теорема доказана.

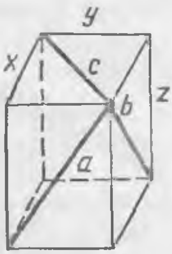


Рис. 276

З а д а ч а (33). Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны a, b, c. Найдите линейные размеры параллелепипеда.

Р е ш е н и е. Обозначим через x, y, z линейные размеры параллелепипеда (рис. 276). Имеем: $x^2+y^2=c^2$, $y^2+z^2=a^2$, $z^2+x^2=b^2$. Почленно складывая первые два уравнения и вычитая третье, получим: $2y^2=c^2+a^2-b^2$. Отсюда $y=\sqrt{\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)}\cdot$ Аналогично находим: $x=\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)}$, $z=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)}$.

ПИРАМИДА

Пирамидой называется многогранник, образованный всеми отрезками, соединяющими данную точку — *вершину пирамиды* — с точками плоского многоугольника — *основания пирамиды*. Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань — треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей ей стороной — сторона основания пирамиды. *Боковыми ребрами* пирамиды называются ребра, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания. *Высотой пирамиды* называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

На рисунке 277 изображена пирамида. Ее основанием является многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$, вершина пирамиды — S, боковые ребра — SA_1, SA_2, ..., SA_n, высота пирамиды — SX. Пирамида называется *n-угольной*, если в ее основании лежит n-угольник. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром*.

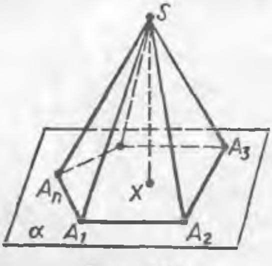


Рис. 277

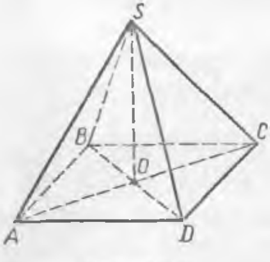


Рис. 278

З а д а ч а (35). Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.

Р е ш е н и е. Так как все боковые ребра равны, то вершины основания одинаково удалены от основания высоты пирамиды (рис. 278), т. е. $AO = BO = CO = DO$. Значит, основанием высоты пирамиды является центр окружности, описанной около основания, т. е. точка пересечения диагоналей прямоугольника. Поэтому высота пирамиды равна катету прямоугольного треугольника, у которого другой катет равен половине диагонали основания, а гипотенузой является боковое ребро. Диагональ основания $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ см. Поэтому высота пирамиды $SO = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см.

Т е о р е м а 18.5. ***Плоскость, параллельная основанию пирамиды и пересекающая ее, отсекает подобную пирамиду.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S — вершина пирамиды, α — плоскость ее основания и α' — секущая плоскость (рис. 279). Возьмем две произвольные точки X и Y на основании пирамиды. Плоскость α' пересекает отрезки XS и YS в точках X' и Y'. Прямые XY и $X'Y'$ параллельны, так как лежат в одной плоскости, плоскости треугольника XYS, и не пересекаются. Из подобия треугольников SXY и $SX'Y'$ следует, что отношения $\frac{X'S}{XS}$ и $\frac{Y'S}{YS}$ равны, т. е. отношение $\frac{X'S}{XS} = k$ не зависит от взятой точки X. Отсюда следует, что отсекаемая плоскостью α' пирамида получается из данной пирамиды преобразованием гомотетии относительно точки S с коэффициентом гомотетии k. А гомотетичные фигуры подобны. Теорема доказана.

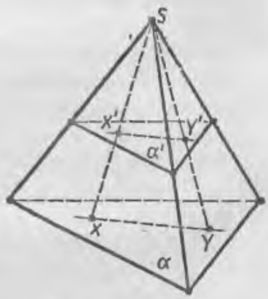


Рис. 279

З а д а ч а (36). Высота пирамиды разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см². Найдите площади сечений (рис. 280).

Р е ш е н и е. Сечения подобны основанию пирамиды с коэффициентами подобия $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Площади подобных фигур относятся как квадраты ли-

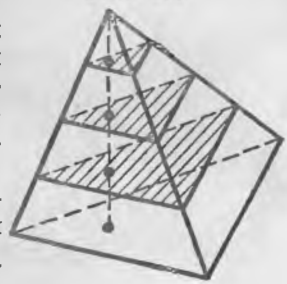


Рис. 280

нейных размеров. Поэтому отношения площадей сечений к площади основания пирамиды есть $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Следовательно, площади сечений равны

$$400 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 25 \text{ см}^2, \ 400 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 100 \text{ см}^2, \ 400 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 225 \text{ см}^2.$$

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника. *Осью* правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту. Очевидно, у правильной пирамиды боковые ребра равны; следовательно, боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой*. *Боковой поверхностью* пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Теорема 18.6. ***Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.***

Доказательство. Если сторона основания a, а число сторон n, то боковая поверхность пирамиды будет: $\frac{al}{2} n = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2}$, где l — апофема, а p — периметр основания. Теорема доказана.

Задача (51). Найдите боковую поверхность пирамиды, у которой площадь основания Q, а двугранные углы при основании равны φ.

Решение. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — многоугольник в основании пирамиды (рис. 281). Проведем высоту пирамиды MO и высоту MB грани MA_1A_2. По теореме о трех перпендикулярах OB — высота треугольника OA_1A_2. Имеем: $MB = \frac{OB}{\cos\varphi}$. Отсюда $\frac{1}{2} A_1A_2 \cdot MB = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot \frac{OB}{\cos\varphi}$. Или $S_{\triangle A_1A_2M} = \frac{S_{\triangle A_1A_2O}}{\cos\varphi}$. Аналогично получаем: $S_{\triangle A_2A_3M} = \frac{S_{\triangle A_2A_3O}}{\cos\varphi}$ и т. д.

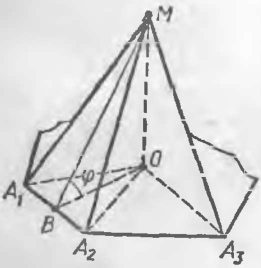


Рис. 281

Складывая эти равенства почленно, в левой части получим боковую поверхность пирамиды, а в правой — площадь основания Q, деленную на $\cos\varphi$. Итак, площадь боковой поверхности пирамиды равна $\frac{Q}{\cos\varphi}$.

По теореме 18.5 плоскость α', параллельная плоскости α основания пирамиды и пересекающая пирамиду, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть также представляет собой многогранник, который называется *усеченной пирамидой* (рис. 282). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях α и α', называются *основаниями пирамиды*; остальные грани называются *боковыми гранями*. Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные (более того, гомотетичные) многоугольники, боковые грани — трапеции. Усеченная пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобокие трапеции; их высоты называются *апофемами*.

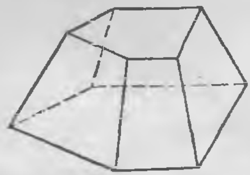


Рис. 282

З а д а ч а (58). Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Р е ш е н и е. Боковые грани пирамиды — трапеции с одним и тем же верхним основанием a, нижним b и высотой (апофемой) l. Поэтому площадь одной грани равна $\frac{1}{2}(a + b)l$. Площадь всех граней, т. е. боковая поверхность, равна $\frac{1}{2}(an + bn)l$, где an и bn — периметры оснований.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Существует пять типов правильных выпуклых многогранников (рис. 283): *правильный тетраэдр*, *куб*, *октаэдр*, *додекаэдр*, *икосаэдр*.

У правильного тетраэдра грани — правильные треугольники; в каждой вершине сходится по три ребра. Тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.

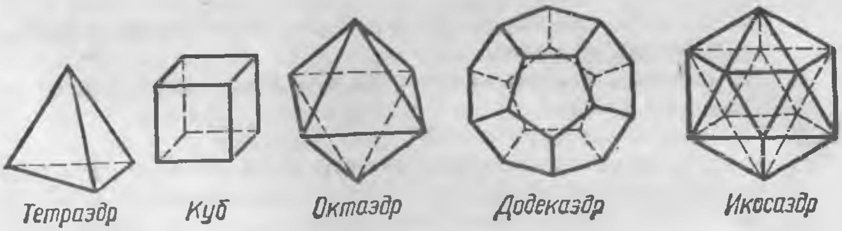


Рис. 283

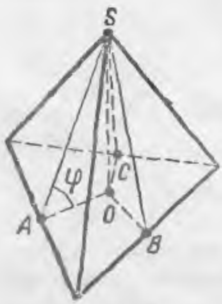


Рис. 284

У куба все грани — квадраты; в каждой вершине сходится по три ребра. Куб представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

У октаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.

У додекаэдра грани — правильные пятиугольники. В каждой вершине сходится по три ребра.

У икосаэдра грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра и октаэдра в каждой вершине сходится по пять ребер.

Задача (70). Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.

Решение. Проведем из вершины S тетраэдра высоты SA, SB, SC его граней, сходящихся в этой вершине, и высоту SO тетраэдра (рис. 284). Если ребро тетраэдра обозначить через a, то высоты граней будут равны $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из равенства высот SA, SB, SC следует равенство отрезков OA, OB, OC. А они перпендикулярны сторонам треугольника в основании тетраэдра (теорема о трех перпендикулярах). Отсюда следует, что точка O является центром окружности, вписанной в основание тетраэдра. Следовательно, отрезки OA, OB и OC равны $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Обозначим через φ двугранный угол при ребре, содержащем точку A. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3},\ \varphi \approx 70^\circ 32'.$$

Очевидно, двугранные углы при остальных ребрах тетраэдра такие же по величине.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что такое двугранный угол (грань угла, ребро угла)?
2. Что такое линейный угол двугранного угла?
3. Почему мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла?
4. Объясните, что такое трехгранный угол (грани и ребра трехгранного угла).
5. Объясните, что такое плоские и двугранные углы трехгранного угла.
6. Что такое многогранный угол?
7. Что такое многогранник (поверхность многогранника)?
8. Какой многогранник называется выпуклым?
9. Что такое грань выпуклого многогранника, ребро, вершина?

10. Что такое призма (основания призмы, боковые грани, ребра)?
11. Что такое высота призмы?
12. Что такое диагональ призмы? Что такое диагональное сечение?
13. Какая призма называется прямой (наклонной)?
14. Какая призма называется правильной?
15. Что такое боковая поверхность призмы (полная поверхность призмы)?
16. Докажите, что боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.
17. Какими соображениями пользуются при построении плоских сечений многогранников?
18. Что такое параллелепипед?
19. Докажите, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
20. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
21. Докажите, что у параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.
22. Какой параллелепипед называется прямоугольным? Что такое линейные размеры прямоугольного параллелепипеда?
23. Что такое куб?
24. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его линейных размеров.
25. Что такое пирамида (основание пирамиды, боковые грани, ребра, высота)?
26. Докажите, что плоскость, параллельная основанию пирамиды, отсекает от нее подобную пирамиду.
27. Какая пирамида называется правильной? Что такое ось правильной пирамиды?
28. Что такое апофема правильной пирамиды? Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.
29. Объясните, что такое усеченная пирамида. Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.
30. Какой многогранник называется правильным?
31. Перечислите пять типов правильных многогранников и опишите их.

1. Из точек A и B, лежащих в гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α.
2. В задаче 1 найдите двугранный угол α, если $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$.
3. У трехгранного угла один плоский угол равен γ ($\gamma < \pi$), а прилежащие к нему двугранные углы равны φ $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла α и угол β, который образует плоскость угла γ с противолежащим ребром.
4. У трехгранного угла два плоские угла острые и равны α, а третий угол равен γ. Найдите двугранные углы φ, противолежащие плоским углам α, и угол β между плоскостью γ и противолежащим ребром.
5. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.
6. Боковое ребро наклонной призмы равно 15 см и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту призмы.
7. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 40 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.
8. Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной a, а боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади ее диагональных сечений.
9. Внутри правильной шестиугольной призмы, у которой боковые грани — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Найдите площадь построенного сечения.
10. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая боковые грани по прямым, составляющим угол α. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы.
11. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом α. Сторона основания равна a. Найдите площадь полученного сечения.
12. В правильной четырехугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см. Найдите диагональ призмы.

13. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани равна Q. Найдите площадь диагонального сечения.
14. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15, высота равна 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.
15. В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2. Найдите высоту.
16. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 32 м^2, а полная поверхность 40 м^2. Найдите высоту.
17. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.
18. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны 2 см, 3 см и 4 см, а боковые ребра 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.
19. По стороне основания a и боковому ребру b найдите полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
20. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45°. Сторона основания l. Найдите боковую поверхность призмы.
21. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.
22. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания равны 6 м и 8 м, а одна из диагоналей основания равна 12 м. Найдите диагонали параллелепипеда.
23. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали.
24. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60°.
25. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен 60°.
26. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда 8 дм. Найдите площадь диагонального сечения.
27. В прямом параллелепипеде боковое ребро равно 1 м, стороны основания равны 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2 : 3. Найдите площади диагональных сечений.

28. У параллелепипеда три грани имеют площади 1 $м^2$, 2 $м^2$ и 3 $м^2$. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?
29. Найдите поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 10 см, 22 см, 16 см.
30. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q, а площадь диагонального сечения M.
31. В прямом параллелепипеде стороны основания 6 м и 8 м образуют угол 30°; боковое ребро равно 5 м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.
32. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см; угол между ними 60°. Боковая поверхность равна 220 $см^2$. Найдите полную поверхность.
33. Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны a, b, c. Найдите линейные размеры параллелепипеда.
34. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Найдите высоту пирамиды.
35. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.
36. Высота пирамиды разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 $см^2$. Найдите площади сечений.
37. Высота пирамиды равна 16 м. Площадь основания равна 512 $м^2$. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50 $м^2$?
38. Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?
39. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите высоту пирамиды.
40. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.
41. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Найдите площадь сечения, если сторона основания a, а высота пирамиды h.

42. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 8 см. Найдите боковое ребро.
43. Основание пирамиды — параллелограмм, у которого стороны 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей, она равна 4 см. Найдите боковое ребро пирамиды.
44. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите двугранный угол x при основании пирамиды.
45. По данной стороне основания a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
46. По данной стороне основания a и высоте b найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
47. По стороне основания a и высоте h найдите полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
48. Найдите полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если ее боковое ребро a, а радиус окружности, вписанной в основание, — r.
49. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14, 76 м^2, а полная поверхность 18 м^2. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.
50. По стороне основания a найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.
51. Найдите боковую поверхность пирамиды, у которой площадь основания Q, а двугранные углы при основании равны φ.
52. Найдите двугранные углы при основании правильной пирамиды, у которой площадь основания равна Q, а боковая поверхность — S.
53. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 10 см, а боковая поверхность равна 144 см^2.
54. В правильной четырехугольной пирамиде найдите сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность 16 см^2.
55. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 м и 8 м; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 1 м. Найдите боковую поверхность пирамиды.
56. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 40 см, 25 см и 25 см. Высота пирамиды проходит через вершину угла, противолежащего стороне 40 см, и равна 8 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

57. Основание пирамиды — квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найдите боковую поверхность пирамиды, если сторона основания равна 20 дм, а высота 21 дм.

58. Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

59. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований равны 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды.

60. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найдите высоту пирамиды.

61. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Найдите диагональ пирамиды.

62. Стороны оснований усеченной правильной треугольной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с большим основанием угол 60°. Найдите высоту.

63. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего b. Боковое ребро образует с основанием угол 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось[1] пирамиды.

64. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4. Стороны оснований равны 2 и 8. Найдите площади диагональных сечений.

65. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны основания 8 м и 5 м, а высота 3 м. Проведите сечение через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием.

66. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найдите полную поверхность.

67. Найдите полную поверхность правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если высота h, а стороны оснований a и b.

68. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, а центры граней октаэдра являются вершинами куба.

69. Докажите, что концы двух непараллельных диагоналей противолежащих граней куба являются вершинами тетраэдра.

70. Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.

71. Найдите двугранные углы октаэдра.

---

[1] Ось правильной усеченной пирамиды совпадает с осью соответствующей полной пирамиды.

§ 19. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР

Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, образованное заключенными между двумя параллельными плоскостями отрезками всех параллельных прямых, пересекающих круг в одной из плоскостей. Отрезки с одним концом на окружности этого круга называются *образующими цилиндра*.

Поверхность цилиндра состоит из *оснований цилиндра* — двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и *боковой поверхности*.

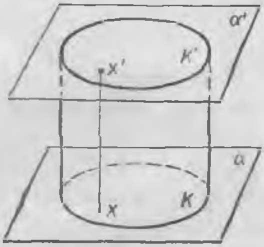


Рис. 285

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его для краткости просто цилиндром.

На рисунке 285 изображен прямой цилиндр. Он образован отрезками XX' параллельных прямых, заключенными между параллельными плоскостями α и α'. Его основаниями являются круги K и K' в этих плоскостях.

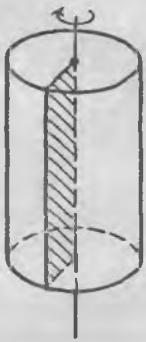


Рис. 286

Прямой цилиндр можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг его стороны как оси (рис. 286).

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований. *Осью цилиндра* называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* цилиндра.

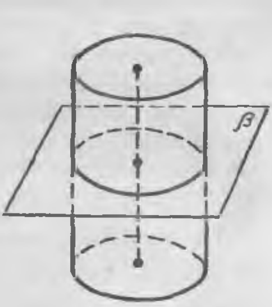
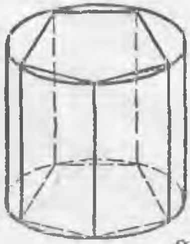


Рис. 287

З а д а ч а (2). Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.



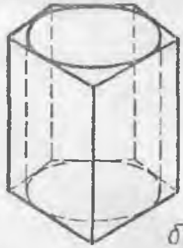


Рис. 288

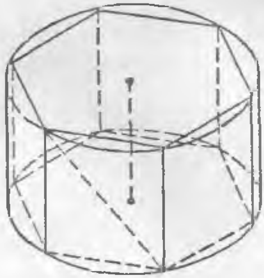


Рис. 289

Решение. Сторона квадрата равна $\sqrt{Q}$. Она равна диаметру основания. Поэтому площадь основания равна $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

Теорема 19.1. ***Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.***

Доказательство. Пусть β — плоскость, перпендикулярная оси цилиндра (рис. 287). Эта плоскость параллельна основаниям. Параллельный перенос в направлении оси цилиндра, совмещающий плоскость β с плоскостью основания цилиндра, совмещает сечение боковой поверхности плоскостью β с окружностью основания. Теорема доказана.

Призмой, *вписанной* в цилиндр, называется такая призма, основания которой — равные многоугольники, вписанные в основания цилиндра. Ее боковые ребра являются образующими цилиндра (рис. 288, *а*). Призма называется *описанной* около цилиндра, если ее основания — равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра. Плоскости ее граней касаются боковой поверхности цилиндра (рис. 288, *б*).

Задача (7). В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Решение. Боковые грани призмы — квадраты, так как сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу (рис. 289). Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол между диагональю грани и осью цилиндра равен углу между диагональю и боковым ребром. А этот угол равен 45°, так как грани — квадраты.

КОНУС

Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, образованное всеми отрезками, соединяющими данную точку — *вершину конуса* — с точками некоторого круга — *осно-*

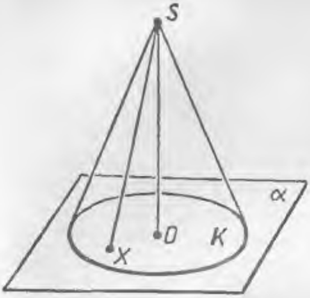


Рис. 290

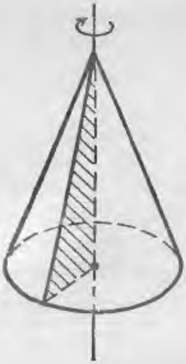


Рис. 291

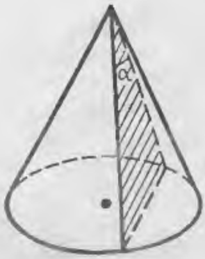


Рис. 292

вания конуса. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*. Поверхность конуса состоит из основания и *боковой поверхности*.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом.

На рисунке 290 изображен прямой конус. Его вершиной является точка S, а основанием — круг K в плоскости α. Конус образован всеми отрезками SX, соединяющими вершину S с точками X основания.

Прямой конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси (рис. 291).

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. *Осью* прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью* конуса.

З а д а ч а (12). В равностороннем конусе (в осевом сечении — правильный треугольник) радиус основания R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α.

Р е ш е н и е. Сечение представляет собой равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными диаметру основания ($2R$), и углом между ними, равным α (рис. 292). Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}(2R)(2R)\sin\alpha = 2R^2\sin\alpha$.

Теорема 19.2. *Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.*

Доказательство. Пусть β — плоскость, перпендикулярная оси конуса и пересекающая конус (рис. 293). Преобразование гомотетии относительно вершины конуса, совмещающее плоскость β с плоскостью основания, совмещает сечение конуса плоскостью β с основанием конуса. Следовательно, сечение конуса плоскостью есть круг, а сечение боковой поверхности — окружность с центром на оси конуса.

Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом* (рис. 294).

Задача (15). Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Решение. Проведем осевое сечение конуса (рис. 295). Из подобия треугольников SAB и SA_1B_1 получаем: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SO_1}{SO}$. Так как $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$ (r — радиус круга в сечении), $OS = H$, $O_1S = d$, то

$$\frac{2r}{2R} = \frac{d}{H}, \; r = \frac{Rd}{H}.$$

Площадь сечения $\pi r^2 = \pi \left(\frac{Rd}{H}\right)^2$.

Пирамидой, *вписанной в конус*, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса (рис. 296). Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса. Пирамида называется *описанной около конуса*, если ее основанием является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 297). Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

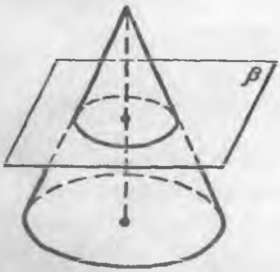


Рис. 293


Рис. 294

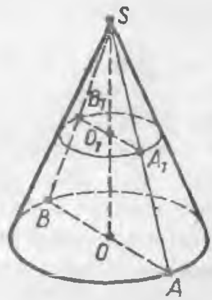


Рис. 295

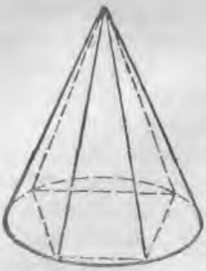


Рис. 296

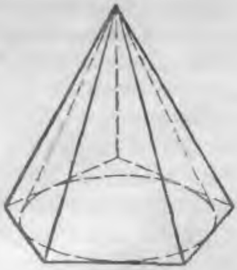


Рис. 297

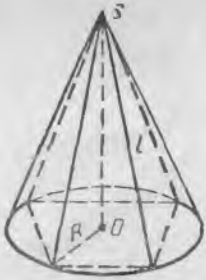


Рис. 298

З а д а ч а (27). У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она является вписанной в некоторый конус.

Р е ш е н и е. Опустим перпендикуляр SO из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 298) и обозначим длину боковых ребер пирамиды через l. Вершины основания удалены от точки O на одно и то же расстояние $R = \sqrt{l^2 - OS^2}$. Отсюда следует, что наша пирамида вписана в конус, у которого вершиной является вершина пирамиды, а основание — круг с центром O и радиусом R.

ШАР

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние — *радиусом шара*. Граница шара называется *шаровой поверхностью* или *сферой*. Таким образом, точками сферы являются все те точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром*. Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками шара*.

Шар так же, как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси (рис. 299).

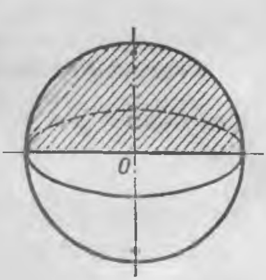


Рис. 299

Т е о р е м а 19.3. ***Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть α — секущая плоскость и O — центр шара (рис. 300). Опустим перпендикуляр из

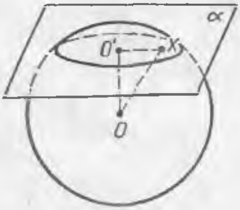


Рис. 300

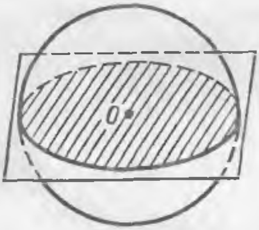


Рис. 301

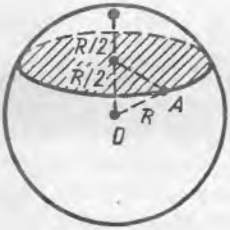


Рис. 302

центра шара на плоскость α и обозначим через O' основание этого перпендикуляра. Пусть X — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. По теореме Пифагора $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Так как OX не больше радиуса R шара, то $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$, т. е. любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки O' на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - OO'^2}$, следовательно, она принадлежит кругу с центром O' и радиусом $\sqrt{R^2 - OO'^2}$. Обратно, любая точка X этого круга принадлежит шару. А это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O'. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что радиус круга, который получается в сечении шара плоскостью, можно вычислить по формуле

$$R' = \sqrt{R^2 - OO'^2}.$$

Отсюда видно, что *плоскости, равноудаленные от центра, пересекают шар по равным кругам*. Круг в сечении плоскостью α будет тем больше, чем ближе плоскость α к центру шара, т. е. чем меньше расстояние OO'. Наибольший круг получается в сечении плоскостью, проходящей через центр шара. Радиус этого круга равен радиусу шара.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом* (рис. 301), а сечение сферы — *большой окружностью*.

З а д а ч а (29). Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Р е ш е н и е. Если радиус шара R (рис. 302), то радиус круга в сечении будет $\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Отношение площади этого круга к площади большого круга равно $\dfrac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2} = \dfrac{3}{4}$.

Т е о р е м а 19.4. ***Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.***

Доказательство. Пусть α — диаметральная плоскость и X — произвольная точка шара (рис. 303). Построим точку X', симметричную точке X относительно плоскости α. Отрезок XX' перпендикулярен плоскости α и пересекается этой плоскостью посередине (в точке A). Из равенства прямоугольных треугольников OAX и OAX' следует, что $OX' = OX$. Так как $OX \leqslant R$, то и $OX' \leqslant R$, т. е. точка, симметричная точке X, принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.

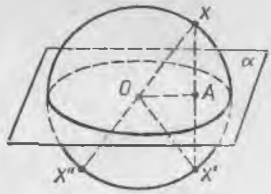


Рис. 303

Пусть теперь X'' — точка, симметричная точке X относительно центра шара. Тогда $OX'' = OX \leqslant R$, т. е. точка X'' принадлежит шару. Теорема доказана полностью.

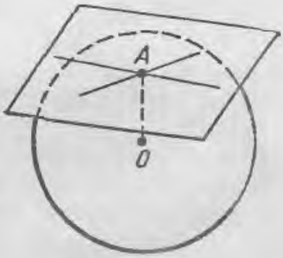


Рис. 304

Плоскость, проходящая через точку A *шаровой поверхности и перпендикулярная* к радиусу, проведенному в точку A, называется *касательной плоскостью*. Точка A называется *точкой касания* (рис. 304).

Теорема 19.5. ***Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.***

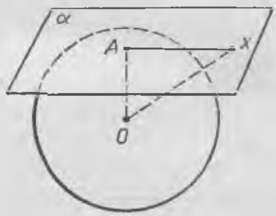


Рис. 305

Доказательство. Пусть α — плоскость, касательная к шару, и A — точка касания (рис. 305). Возьмем произвольную точку X плоскости α, отличную от A. Так как OA — перпендикуляр, а OX — наклонная, то $OX > OA = R$. Следовательно, точка X не принадлежит шару. Теорема доказана.

Прямая, проходящая через точку A шаровой поверхности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*.

Теорема 19.6. ***Через любую точку шаровой поверхности проходит бесчисленное множество касательных, все они лежат в касательной плоскости шара.***

Доказательство. Действительно, пусть α — касательная плоскость шара в точке A (см. рис. 305). Тогда любая прямая в плоскости α, проходящая через точку A, перпендикулярна радиусу OA и, следовательно, является касательной. Любая касательная, проходящая через точку A, перпендикулярна радиусу OA, а следовательно, лежит в плоскости α.

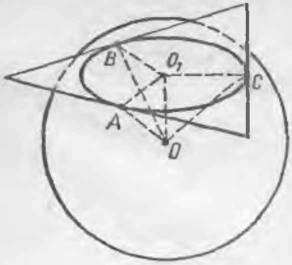


Рис. 303

Задача (38). Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

Решение. Пусть A, B, C — точки касания шара со сторонами треугольника (рис. 306). Опустим из центра O шара перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника. Отрезки OA, OB и OC перпендикулярны сторонам. По теореме о трех перпендикулярах отрезки O_1A, O_1B и O_1C тоже перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника. Из равенства прямоугольных треугольников OO_1A, OO_1B, OO_1C (у них катет OO_1 общий, а гипотенузы равны радиусу) следует равенство сторон: $O_1A = O_1B = O_1C$. Следовательно, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник. Радиус этой окружности, как мы знаем, равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора находим искомое расстояние. Оно равно

$$\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}.$$

УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

Составим уравнение сферы в декартовых координатах x, y, z. Пусть центр сферы находится в точке A (a, b, c), а радиус сферы R. Точками сферы являются те и только те точки пространства, расстояния от которых до точки A равны R. Квадрат расстояния от точки (x, y, z) до точки A равен

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Поэтому уравнение сферы имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Если центром сферы является начало координат, то уравнением сферы является

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Задача (43). Найдите уравнение сферы, которая проходит через точки (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0).

Решение. Мы знаем, что уравнение сферы имеет вид: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$. Координаты данных точек должны удовлетворять этому уравнению. Подставляя их в уравнение, получаем систему уравнений относительно неизвестных a, b, c и R:

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2,$$
$$a^2 + b^2 + (1 - c)^2 = R^2,$$
$$a^2 + (1 - b)^2 + c^2 = R^2,$$
$$(1 - a)^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$

Почленно вычитая первое уравнение из остальных, получим: $2c - 1 = 0$, $2b - 1 = 0$, $2a - 1 = 0$. Отсюда

$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{2},\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Искомое уравнение сферы:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Теорема 19.7. *Линия пересечения двух сфер есть окружность.*

Доказательство. Примем прямую, соединяющую центры сфер, за ось x. Пусть точка $(a, 0, 0)$ — центр первой сферы, а R_1 — ее радиус. Точка $(b, 0, 0)$ — центр второй сферы, а R_2 — ее радиус. Уравнениями сфер будут:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, \qquad (1)$$
$$(x - b)^2 + y^2 + z^2 = R_2^2. \qquad (2)$$

Точками пересечения сфер являются те точки пространства, которые удовлетворяют уравнениям (1) и (2). Поэтому они удовлетворяют уравнению, которое получается почленным вычитанием уравнений (1) и (2), т. е. уравнению

$$2(b - a)x = R_1^2 - R_2^2 - a^2 + b^2. \qquad (3)$$

Это уравнение является уравнением плоскости, параллельной плоскости yz. Таким образом, пересечение наших сфер совпадает с пересечением плоскости, заданной уравнением (3), с любой из данных сфер. А это пересечение, как мы знаем, является окружностью. Теорема доказана.

Задача (45). Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Решение. Проведем сечение через центры шаров (рис. 307). Линия, о которой идет речь в задаче, есть окружность (теорема 19. 7). Ее радиус равен высоте равностороннего треугольника OAO_1 со сторонами, равными R. Высота равна $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, длина линии равна $\pi R\sqrt{3}$.

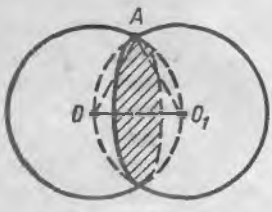


Рис. 307

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Объясните, что такое круговой цилиндр (образующая цилиндра, основания и боковая поверхность цилиндра).
2. Какой цилиндр называется прямым?
3. Что такое радиус цилиндра, высота цилиндра, ось цилиндра, осевое сечение цилиндра, касательная плоскость цилиндра?
4. Докажите, что плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.
5. Что такое призма, вписанная в цилиндр (описанная около цилиндра)?
6. Что такое круговой конус, вершина конуса, образующая конуса, основание конуса, боковая поверхность конуса?
7. Какой конус называется прямым?
8. Что такое высота конуса, ось конуса, осевое сечение конуса, касательная плоскость конуса?
9. Докажите, что плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.
10. Что такое усеченный конус?
11. Какая пирамида называется вписанной в конус (описанной около конуса)?
12. Что такое шар (шаровая поверхность или сфера)?
13. Что такое радиус шара, диаметр шара? Какие точки шара называются диаметрально противоположными?
14. Докажите, что пересечение шара с плоскостью есть круг.
15. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара? Что такое большой круг?
16. Докажите, что любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.
17. Какая плоскость называется касательной к шару?
18. Докажите, что касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.
19. Какая прямая называется касательной к шару? Докажите, что через любую точку шаровой поверхности проходит бесчисленное множество касательных прямых, все они лежат в касательной плоскости шара.
20. Выведите уравнение сферы.
21. Докажите, что линия пересечения двух сфер есть окружность.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.
2. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.
3. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.
4. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.
5. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы данного отрезка длиной 10 дм лежат на окружностях обоих оснований. Найдите кратчайшее расстояние от него до оси.
6. В равностороннем цилиндре (диаметр равен высоте цилиндра) точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен $60°$. Найдите угол x между проведенной прямой и осью цилиндра.
7. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.
8. Высота цилиндра 2 м. Радиус оснований 7 м. В этот цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все вершины его лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата.
9. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую.
10. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом $30°$. Найдите высоту.
11. Радиус основания конуса R. Осевым сечением является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.
12. В равностороннем конусе (в осевом сечении — правильный треугольник) радиус основания R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α.
13. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12.
14. Радиус основания конуса R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.

15. Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

16. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания?

17. Через середину высоты конуса проведена прямая параллельно образующей l. Найдите длину отрезка прямой, заключенного внутри конуса.

18. Образующая конуса 13 см, высота 12 см. Конус пересечен прямой, параллельной основанию; расстояние от нее до основания равно 6 см, а до высоты 2 см. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри конуса.

19. В конусе даны радиус основания R и высота H. Найдите ребро вписанного в него куба.

20. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Найдите ребро призмы.

21. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.

22. Радиусы оснований усеченного конуса R и r; образующая наклонена к основанию под углом $45°$. Найдите высоту.

23. Образующая усеченного конуса равна $2a$ и наклонена к основанию под углом $60°$. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания. Найдите каждый из радиусов.

24. Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и 7 дм, образующая 5 дм. Найдите площадь осевого сечения.

25. Площади оснований усеченного конуса 4 дм^2 и 16 дм^2. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.

26. Площади оснований усеченного конуса M и m. Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

27. У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она является вписанной в некоторый конус.

28. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

29. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

30. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом $60°$ к нему. Найдите площадь сечения.

31. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом $30°$ к первой. Найдите площадь сечения.

32. Радиус земного шара R. Чему равна длина параллели, если ее широта 60°?
33. Город N находится на 60° северной широты. Какой путь совершает этот пункт в течение 1 ч вследствие вращения Земли вокруг своей оси? Радиус Земли принять равным 6000 км.
34. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара 13 см. Найдите расстояние от центра до плоскости, проходящей через эти точки.
35. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка A и окружность, все точки которой удалены (по прямой) от A на 15 см. Найдите радиус этой окружности.
36. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Докажите, что площадь сечения, заключенного между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания.
37. Тело ограничено двумя концентрическими шаровыми поверхностями (полый шар). Докажите, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней шаровой поверхности.
38. Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.
39. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника. Радиус шара 5 см.
40. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара 10 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.
41. Через точку, лежащую на поверхности шара, проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по кругам радиусов r_1 и r_2. Найдите радиус шара R.
42. Радиус шара 7 см. На его поверхности даны две равные окружности, имеющие общую хорду длиной 2 см. Найдите радиусы окружностей, зная, что их плоскости перпендикулярны.
43. Найдите уравнение сферы, которая проходит через точки (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0).
44. Найдите уравнение сферы радиуса 3, проходящей через точки (0, 0, 0), (4, 0, 0), (0, 4, 0).
45. Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найди-

те длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

46. Радиусы шаров равны 25 дм и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

47. Найдите радиус шара, описанного около куба со стороной a.

48. Найдите радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.

49. Шар радиуса R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.

50. Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Ребро основания призмы равно a. Найдите высоту призмы при: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

51. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен φ. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

52. Найдите радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

53. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров.

54. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоскими углами α при ее вершине. Найдите высоту пирамиды.

§ 20. ОБЪЕМЫ ТЕЛ

ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА

Представим себе два сосуда: один в форме куба, а второй произвольной формы (рис. 308). Пусть оба сосуда доверху наполняются жидкостью. Допустим, что для наполнения первого сосуда потребовалось m кг жидкости, а для наполнения второго сосуда n кг жидкости. Естественно считать, что второй сосуд в $\frac{n}{m}$ раз больше первого. Число, указывающее, во сколько раз второй сосуд больше первого, мы будем называть *объемом* второго сосуда. Первый сосуд является здесь единицей измерения. Из этого определения понятия объема получают-

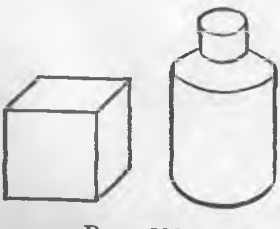


Рис. 308

ся следующие его свойства. Во-первых, так как для заполнения каждого сосуда требуется определенное количество жидкости, то каждый сосуд имеет определенный (положительный) объем. Во-вторых, для заполнения равных сосудов требуется одно и то же количество жидкости. Поэтому равные сосуды имеют равные объемы. В-третьих, если данный сосуд разделить на две части, то количество жидкости, необходимое для заполнения всего сосуда, состоит из количества жидкости, необходимого для заполнения его частей. Поэтому объем всего сосуда равен сумме объемов его частей.

По данному нами определению для того, чтобы узнать объем сосуда, надо заполнить его жидкостью. В жизни, однако, требуется решать как раз обратную задачу. Требуется узнать количество жидкости, необходимое для заполнения сосуда, не производя самого заполнения. Если бы мы знали объем сосуда, то количество жидкости мы получили бы, умножая объем сосуда на количество жидкости, необходимое для заполнения единицы объема. Как же узнать объем сосуда?

Мы будем называть тело простым, если его можно разбить на конечное число тетраэдров, т. е. треугольных пирамид. В частности, такие тела, как призма, пирамида, вообще выпуклый многогранник являются простыми. Сейчас мы найдем формулы для вычисления объема простых тел и тем самым докажем, что отмеченные нами три свойства объема полностью его определяют.

ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Найдем объем прямоугольного параллелепипеда. На рисунке 309 изображены куб, являющийся единицей измерения объема, и прямоугольный параллелепипед, объем которого надо измерить. Единицей длины служит ребро куба.

Рассмотрим сначала случай, когда длины ребер параллелепипеда a, b и c выражаются конечными десятичными дробями и число десятичных знаков после запятой не более n.

Разобьем ребра куба, исходящие из одной вершины, на 10^n равных частей и проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные этим ребрам. При этом куб разобьется на $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ малых кубов с ребрами, равными $\frac{1}{10^n}$.

Найдем объем малого куба. По свойству объема объем большого куба равен сумме объемов малых кубов. Так как объем большого куба равен единице, а число малых кубов равно 10^{3n}, то объем малого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$.

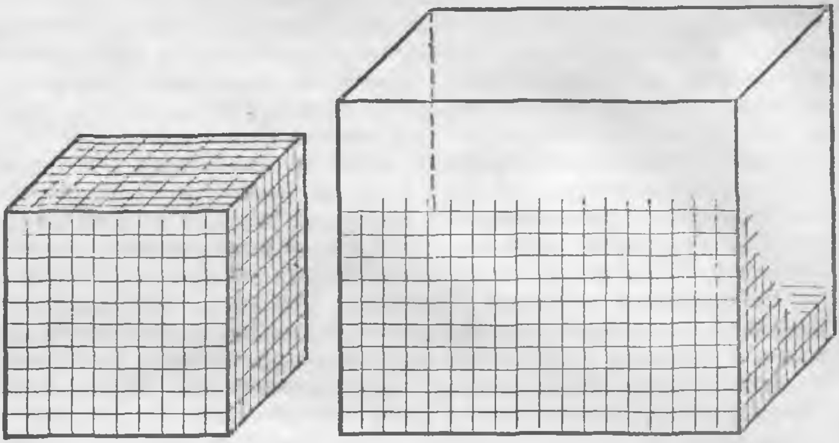


Рис. 309

Так как числа $\frac{a}{\frac{1}{10^n}} = a10^n$, $\frac{b}{\frac{1}{10^n}} = b10^n$, $\frac{c}{\frac{1}{10^n}} = c10^n$ целые, то ребра параллелепипеда можно разбить на целое число частей, равных $\frac{1}{10^n}$. На ребре a их будет $a10^n$, на ребре b будет $b10^n$, на ребре c будет $c10^n$. Проведем через точки деления ребер перпендикулярные ребрам плоскости. При этом мы получаем разбиение параллелепипеда на малые кубы со стороной $\frac{1}{10^n}$. Число их равно $a10^n \cdot b10^n \cdot c10^n = abc10^{3n}$. Объем параллелепипеда равен сумме объемов содержащихся в нем малых кубов. Так как объем малого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$, а их число равно $abc \cdot 10^{3n}$, то объем параллелепипеда равен $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$.

Рассмотрим теперь случай, когда длина хотя бы одного из ребер a, b, c выражается бесконечной десятичной дробью. Обозначим через a_1 и a_2 приближенные значения числа a с недостатком и с избытком с точностью до n десятичных знаков. Приближенные значения чисел b и c с той же точностью обозначим через b_1 и b_2, c_1 и c_2. Параллелепипед с ребрами a_1, b_1 и c_1 имеет объем меньший, чем данный параллелепипед, так как его можно поместить внутрь данного. Параллелепипед с ребрами a_2, b_2, c_2 имеет объем больший, чем данный параллелепипед, так как данный параллелепипед можно поместить внутрь него. По доказанному объем параллелепипеда с ребрами a_1, b_1, c_1 равен $a_1b_1c_1$, а объем параллелепипеда с ребрами a_2, b_2, c_2 равен $a_2b_2c_2$. Таким образом, объем данного параллелепипеда заключен между $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$. Так как $a_1b_1c_1$ и $a_2b_2c_2$ дают приближенное значение числа abc с любой наперед заданной точностью, если n достаточно велико, то $V = abc$. Итак, ***объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле***

$$V = abc.$$

З а д а ч а (3). Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Чему равно ребро куба?

Р е ш е н и е. Обозначим ребро куба через x, тогда $(x + 2)^3 - x^3 = 98$, т. е. $x^2 + 2x - 15 = 0$. Уравнение имеет два корня: $x = 3$, $x = -5$. Геометрический смысл имеет только положительный корень. Итак, ребро куба равно 3 см.

ОБЪЕМ НАКЛОННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Найдем объем наклонного параллелепипеда (рис. 310, *а*). Проведем через ребро BC плоскость, перпендикулярную основанию $ABCD$, и дополним параллелепипед треугольной призмой $BB_1B_2CC_1C_2$. Отсечем теперь от полученного тела треугольную призму плоскостью, проходящей через ребро AD и перпендикулярной основанию $ABCD$. Тогда получим снова параллелепипед. Этот параллелепипед имеет объем, равный объему исходного параллелепипеда. Действительно, достроенная призма и отсекаемая совмещаются параллельным переносом на отрезок AB, следовательно, имеют одинаковые объемы. При описанном преобразовании параллелепипеда сохраняются площадь его основания и высота. Сохраняются также плоскости двух боковых граней, а две другие становятся перпендикулярными основанию. Применяя еще раз такое преобразование к наклонным граням, получим параллелепипед, у которого все боковые грани перпендикулярны основанию, т. е. прямой параллелепипед. Полученный прямой параллелепипед подвергнем аналогичному преобразованию в прямоугольный параллелепипед, до-

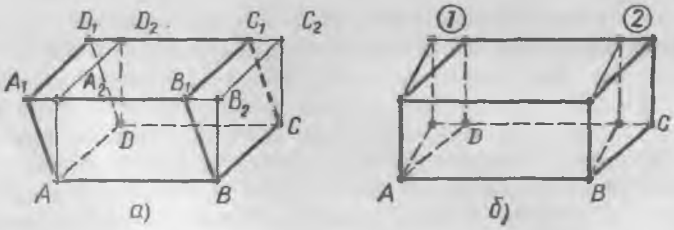


Рис. 310

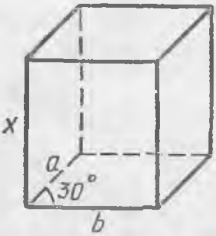


Рис. 311

полняя его сначала призмой 1, а затем отсекая призму 2 (рис. 310, *б*). Это преобразование также сохраняет объем параллелепипеда, площадь основания и высоту.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров. Произведение двух линейных размеров есть площадь основания параллелепипеда, а третий размер — его высота. Таким образом, у прямоугольного параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту. Так как при описанном выше преобразовании данного параллелепипеда в прямоугольный каждый раз сохраняются объем, площадь основания и высота, то и у исходного параллелепипеда объем равен произведению площади основания на высоту.

Итак, ***объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

Задача (9). В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.

Решение. Обозначим высоту через x (рис. 311). Тогда $(2a+2b)x=S$. Отсюда $x=\frac{S}{2(a+b)}$. Площадь основания параллелепипеда равна $ab\sin 30^\circ=\frac{ab}{2}$. Объем равен $\frac{abS}{4(a+b)}$.

ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

Найдем объем призмы. Рассмотрим сначала треугольную призму (рис. 312). Дополним ее до параллелепипеда, как указано на рисунке. Точка O является центром симметрии параллелепипеда. Поэтому достроенная призма симметрична исходной относительно точки O, следовательно, имеет объем, равный объему исходной призмы. Таким образом, объем построенного параллелепипеда равен удвоенному объему данной призмы.

Объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту. Площадь его основания равна удвоенной площади треугольника ABC, а высота равна высоте исходной призмы. Отсюда заключаем, что объем исходной призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Рассмотрим теперь произвольную призму (рис. 313). Разобьем ее основание на треугольники. Пусть $\triangle$ — один из этих треугольников. Проведем через произвольную точку X треугольника $\triangle$ прямую, параллельную боковым ребрам.

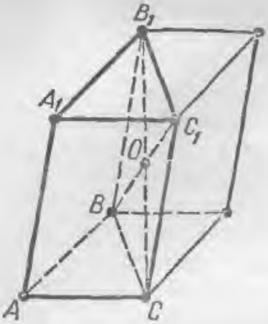


Рис. 312

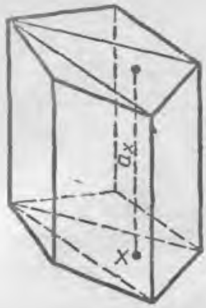


Рис. 313

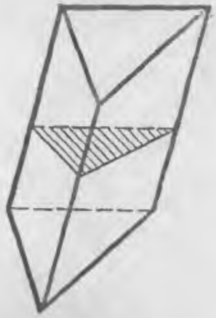


Рис. 314

Пусть a_x — отрезок этой прямой, принадлежащий призме. Когда точка X описывает треугольник $\triangle$, отрезки a_x заполняют треугольную призму. Построив такую призму для каждого треугольника $\triangle$, мы получим разбиение данной призмы на треугольные. Все эти призмы имеют одну и ту же высоту, равную высоте исходной призмы.

Объем данной призмы равен сумме объемов треугольных призм, ее составляющих. По доказанному объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту. Отсюда следует, что объем данной призмы равен

$$V = S_1H + S_2H + \dots + S_nH = \\ = (S_1 + S_2 + \dots + S_n)H,$$

где $S_1, S_2, \dots, S_n$ — площади треугольников $\triangle$, на которые разбито основание призмы, а H — высота призмы. Сумма площадей треугольников $\triangle$ равна площади S основания данной призмы. Поэтому

$$V = SH.$$

Итак, ***объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.***

Задача (21). В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l.

Решение. Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 314). Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а высота равна l. Эта призма имеет тот же объем. Таким образом, объем исходной призмы равен Ql.

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

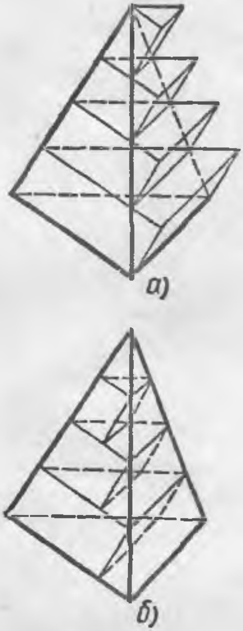


Рис. 315

Для того чтобы найти объем треугольной пирамиды, естественно было бы попытаться дополнить ее равными пирамидами до параллелепипеда и, таким образом, зная объем параллелепипеда, найти объем пирамиды. К сожалению, это в общем случае сделать нельзя. Поэтому мы применим другой способ.

Разобьем высоту пирамиды на n равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные основанию пирамиды (рис. 315). При этом пирамида разобьется на слои. Для каждого такого слоя построим две призмы: призму, содержащую слой, и призму, содержащуюся в слое, как показано на рисунке 315.

Обозначим через V_m объем m-го слоя пирамиды, считая от вершины. Основание призмы, содержащей слой пирамиды, подобно основанию пирамиды, и поэтому его площадь равна $S\left(\frac{m}{n}\right)^2$, где S — площадь основания пирамиды. Высота призмы $\frac{H}{n}$, поэтому объем призмы равен $\frac{SHm^2}{n^3}$. Так как призма содержит слой пирамиды, то она имеет больший объем. Имеем:

$$V_m < \frac{SHm^2}{n^3} < \frac{SH}{3n^3}[(m+1)^3 - m^3],$$

потому что

$$\frac{(m+1)^3 - m^3}{3} = \frac{3m^2 + 3m + 1}{3} > m^2 \text{ при } m \geqslant 0.$$

Объем пирамиды равен

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n < \frac{SH}{3n^3}[(n+1)^3 - 1] =$$

$$= \frac{SH}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right] < \frac{SH}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3.$$

Так как объем призмы, содержащейся в слое, меньше объема слоя, то при $m > 1$

$$V_m > \frac{SH(m-1)^2}{n^3} > \frac{SH}{3n^3}[(m-1)^3 - (m-2)^3],$$

потому что

$$\frac{(m-1)^3-(m-2)^3}{3}=\frac{(m-1)^3-[(m-1)-1]^3}{3}=$$

$$=(m-1)^2-(m-1)+\frac{1}{3}<(m-1)^2 \text{ при } m>1.$$

Отсюда получаем:

$$V=V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n>\frac{SH}{3n^3}(n-1)^3=$$

$$=\frac{SH}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^3.$$

Таким образом,

$$\frac{SH}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^3<V<\frac{SH}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3.$$

При достаточно большом n правая и левая части неравенства сколь угодно мало отличаются от $\frac{SH}{3}$, а значит, заключенная между ними величина V также сколь угодно мало отличается от $\frac{SH}{3}$. Но это может быть только тогда, когда $V=\frac{SH}{3}$.

Итак, ***объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:***

$$V=\frac{1}{3}SH.$$

Пусть теперь имеем любую, не треугольную пирамиду. Разобьем ее основание на треугольники $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$. Пирамиды, у которых основаниями являются эти треугольники, а вершинами — вершина данной пирамиды, составляют данную пирамиду. Объем данной пирамиды равен сумме объемов составляющих ее пирамид. Так как все они имеют ту же высоту H, что и данная пирамида, то объем данной пирамиды равен

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\ldots+S_n)=\frac{1}{3}SH.$$

Итак, ***объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.***

З а д а ч а (42). Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1>Q_2$) и высотой h.

Р е ш е н и е. Дополним данную усеченную пирамиду до полной (рис. 316). Пусть x — ее высота. Объем усеченной

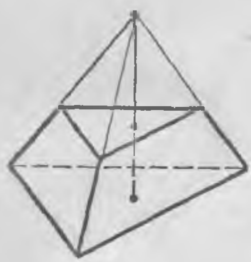


Рис. 316

пирамиды равен разности объемов двух полных пирамид: одной — с площадью основания Q_1 и высотой x, другой — с площадью основания Q_2 и высотой $x - h$.

Из подобия этих пирамид находим x: $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$.

Отсюда $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$. Объем усеченной пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1 \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} h \frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3} h \left(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2\right).$$

ОБЪЕМЫ ПОДОБНЫХ ТЕЛ

Пусть T и T' — два простых подобных тела. Это значит, что существует преобразование подобия, при котором тело T переходит в тело T'. Обозначим через k коэффициент подобия.

Разобьем тело T на треугольные пирамиды P_1, P_2, ..., P_n. Преобразование подобия, которое переводит тело T в тело T', переводит пирамиды P_1, P_2, ..., P_n в пирамиды P'_1, P'_2, ..., P'_n. Эти пирамиды составляют тело T', и поэтому объем тела T' равен сумме объемов пирамид P'_1, P'_2, ..., P'_n.

Так как пирамиды P'_i и P_i подобны и коэффициент подобия равен k, то отношение их высот равно k, а отношение площадей их оснований равно k^2. Следовательно, отношение объемов пирамид равно k^3. Так как тело T составлено из пирамид P_i, а тело T' составлено из пирамид P'_i, то отношение объемов тел T' и T тоже равно k^3.

Число k — коэффициент подобия — равно отношению расстояний между любыми двумя соответствующими парами точек при преобразовании подобия. Следовательно, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел T' и T. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Объемы двух подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

З а д а ч а (48). Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

Р е ш е н и е. Как мы знаем, проведенная плоскость отсекает подобную пирамиду (рис. 317). Коэффициент подо-

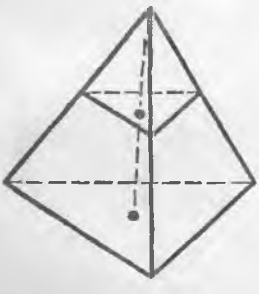


Рис. 317

бия равен отношению высот, т. е. $\frac{1}{2}$. Поэтому объемы пирамид относятся как $\left(\frac{1}{2}\right)^3$: 1. Следовательно, плоскость делит нашу пирамиду на части, объемы которых относятся как $\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1:7$.

ОБЪЕМЫ ЦИЛИНДРА И КОНУСА

Найдем объем V цилиндра с радиусом основания R и высотой H.

При выводе формулы для площади круга (§ 13) были построены два многоугольника: один — содержащий круг, второй — содержащийся в круге, с площадями, как угодно мало отличающимися от площади круга. Построим такие многоугольники для круга в основании цилиндра. Пусть P — многоугольник, содержащий круг, а P' — многоугольник, содержащийся в круге. Пусть площади этих многоугольников отличаются от площади круга меньше чем на ε.

Построим две прямые призмы с основаниями P и P' и высотой H, равной высоте цилиндра. Первая призма содержит цилиндр, а значит, имеет объем, больший объема цилиндра. Вторая призма содержится в цилиндре, а следовательно, имеет объем, меньший объема цилиндра.

Площадь основания первой призмы меньше $\pi R^2 + \varepsilon$, поэтому ее объем не больше $(\pi R^2 + \varepsilon) H$. Площадь основания второй призмы больше $\pi R^2 - \varepsilon$, а ее объем не меньше $(\pi R^2 - \varepsilon)H$. Объем цилиндра заключен между объемами призм:

$$H(\pi R^2 - \varepsilon) < V < (\pi R^2 + \varepsilon) H.$$

Отсюда

$$-H\varepsilon < V - \pi R^2 H < H\varepsilon,$$

т. е. величина $|V - \pi R^2 H|$ сколь угодно мала. А так как она имеет вполне определенное значение, то $V - \pi R^2 H = 0$. Таким образом, *объем цилиндра с радиусом основания R и высотой H равен*

$$V = \pi R^2 H.$$

Таким же способом *для объема конуса получается формула*

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

где R — радиус основания конуса, а H — высота. При выводе этой формулы строятся две пирамиды с основаниями P и P' и вершиной в вершине конуса.

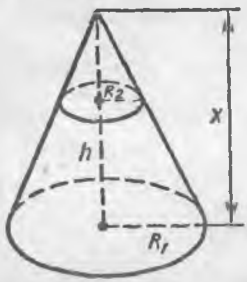


Рис. 318

Задача (56). Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.

Решение. Дополним данный усеченный конус до полного (рис. 318). Пусть x — его высота. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух полных конусов: одного — с радиусом основания R_1 и высотой x, другого — с радиусом основания R_2 и высотой $x - h$.

Из подобия конусов находим x: $\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2}$, $x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}$. Объем усеченного конуса равен .

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R_1^2 \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h\,(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2).$$

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Телом вращения в простейшем случае называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (*оси вращения*), пересекается по кругам с центрами на этой прямой. Круговой цилиндр, конус, шар являются примерами тел вращения. Найдем формулу для вычисления объема тела вращения.

Введем декартовы координаты x, y, z, приняв ось тела за ось x. Плоскость xy пересекает поверхность тела по линии, для которой ось x является осью симметрии. Пусть $y = f(x)$ — уравнение той части линии, которая расположена над осью (рис. 319).

Проведем через точку x оси абсцисс плоскость, перпендикулярную к ней, и обозначим через $V(x)$ объем части тела, лежащей слева от этой плоскости, тогда $V(x)$ является функцией от x. Найдем ее производную.

По определению

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}.$$

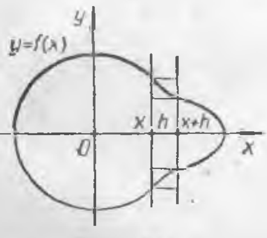


Рис. 319

Разность $V(x+h) - V(x)$ представляет собой объем слоя тела толщиной h между двумя плоскостями, перпендикулярными оси x, проходящими через точки с абсциссами x и $x + h$. Пусть M — наибольшее, а m — наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[x, x+h]$. Тогда рассматриваемый слой тела содержит цилиндр с радиусом m, высотой h и содержится в цилиндре с радиусом M и той же высотой h (см. рис. 319). Поэтому

$$\pi m^2 h \leqslant V(x+h) - V(x) \leqslant \pi M^2 h,$$

$$\pi m^2 \leqslant \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leqslant \pi M^2.$$

Если $f(x)$ — непрерывная функция, то при $h \to 0$ левая и правая части последнего неравенства стремятся к одному и тому же пределу $\pi f^2(x)$. К тому же пределу стремится и отношение, заключенное между ними, т. е. производная $V'(x) = \pi f^2(x)$.

По известной формуле анализа

$$V(b) - V(a) = \int_a^b \pi f^2(x) dx, \quad a < b.$$

Эта формула и дает объем части тела, заключенной между параллельными плоскостями $x = a$ и $x = b$.

ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

Применим полученную формулу для объемов тел вращения к вычислению объема шара и его частей: шарового слоя и сегмента.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью. *Шаровым слоем* называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар (рис. 320).

Введем декартовы координаты, приняв центр шара за начало координат. Плоскость xy пересекает шар радиуса R по окружности, которая, как известно, задается уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Полуокружность, расположенная над осью x, задается уравнением

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leqslant x \leqslant R.$$

Поэтому объем шарового слоя между плоскостями $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле

$$V = V(b) - V(a) = \pi \int_a^b (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_a^b = \pi R^2 (b - a) - \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3).$$

Для объема всего шара надо взять $a = -R$, $b = R$. Тогда получим *объем шара:*

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

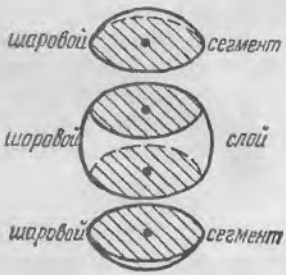


Рис. 320

Для получения объема шарового сегмента высотой H надо взять $a = R - H$, $b = R$. Получим *объем шарового сегмента:*

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

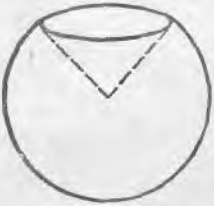


Рис. 321

Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. Если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется (рис. 321). Объем шарового сектора получается сложением или вычитанием объемов соответствующих сегмента и конуса. Для *объема шарового сектора* получается следующая формула:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус шара, а H — высота соответствующего шарового сегмента.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сформулируйте основные свойства объема.
2. Докажите, что объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров.
3. Докажите, что объем любого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.
4. Докажите, что объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.
5. Выведите формулу для объема треугольной пирамиды.
6. Докажите, что объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.
7. Докажите, что объемы подобных тел относятся как кубы соответствующих линейных размеров.
8. Выведите формулу для объема цилиндра (конуса).
9. Выведите общую формулу для объемов тел вращения.
10. Что такое шаровой сегмент, шаровой слой, шаровой сектор?
11. Выведите формулы для объема шара, шарового сегмента, шарового сектора.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какую длину имеет ребро этого куба?

2. Металлический куб имеет внешнее ребро 10,2 см и массу 514,15 г. Толщина стенок равна 0,1 см. Найдите плотность металла, из которого сделан куб.
3. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 $см^3$. Чему равно ребро куба?
4. Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то его объем увеличится в 125 раз. Найдите ребро.
5. Кирпич размером $25 \times 12 \times 6{,}5$ см имеет массу 3,51 кг. Найдите его плотность.
6. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 $м^3$ на площадке размером $2{,}5 \times 1{,}75$ м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.
7. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найдите ребро равновеликого ему куба.
8. Измерения прямоугольного бруска 3 см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое ребро на x сантиметров, то поверхность увеличится на 54 $см^2$. Как увеличится его объем?
9. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.
10. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см образуют угол 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объем.
11. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого 1 $м^2$. Площади диагональных сечений 3 $м^2$ и 6 $м^2$. Найдите объем параллелепипеда.
12. Решите предыдущую задачу в общем случае, если площадь ромба Q, а площади диагональных сечений M и N.
13. Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер равно 2 м и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.
14. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найдите объем параллелепипеда.
15. По стороне основания a и боковому ребру найдите объем правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.
16. Деревянная плитка в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2 см и толщиной 0,7 см имеет массу 17,3 г. Найдите плотность дерева.
17. Чугунная труба имеет квадратное сечение, ее внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Какова масса 1 погонного метра трубы (плотность чугуна 7,3 $г/см^3$)?
18. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы.
19. Сторона основания правильной треугольной призмы

равна a, боковая поверхность равновелика сумме оснований. Найдите ее объем.

20. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 м^2, а расстояние между двумя противолежащими боковыми гранями 2 м. Найдите объем призмы.
21. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l.
22. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м, а расстояния между ними 26 м, 25 м и 17 м. Найдите объем призмы.
23. Вычислите пропускную способность (в кубических метрах за 1 ч) водосточной трубы, сечение которой имеет вид равнобедренного треугольника с основанием 1,4 м и высотой 1,2 м. Скорость течения 2 м/с.
24. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижним основанием 14 м, верхним 8 м и высотой 3,2 м. Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.
25. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объем призмы.
26. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, а площади боковых граней 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Найдите объем.
27. Основание призмы — треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 3 см. Боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите ребро равновеликого куба.
28. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна основанию и представляет собой ромб, у которого меньшая диагональ равна с. Найдите объем призмы.
29. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью — угол β?
30. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 см. У одной из вершин параллелепипеда все три плоских угла острые, по 2α каждый. Найдите объем параллелепипеда.
31. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Найдите объем параллелепипеда.
32. Чему равен объем прямой четырехугольной призмы, если ее высота h, диагонали наклонены к плоскости ос-

нования под углами α и β и острый угол между диагоналями основания равен γ?

33. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

34. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.

35. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно b. Найдите объем пирамиды.

36. Чему равен объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны?

37. По ребру a правильного тетраэдра найдите его объем.

38. По ребру a октаэдра найдите его объем.

39. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м; все боковые ребра равны 21,5 м. Найдите объем пирамиды.

40. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.

41. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4 см, каждое из остальных 3 см. Найдите объем пирамиды.

42. Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.

43. В пирамиде с площадью основания Q_1 проведено сечение, параллельное основанию, на расстоянии h от него. Площадь сечения равна Q_2. Найдите высоту пирамиды.

44. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны a и b, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен α. Найдите объем пирамиды.

45. Решите предыдущую задачу в случае правильной усеченной треугольной пирамиды.

46. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно l и составляет со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Найдите объем пирамиды.

47. Найдите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого α и β, радиус описанного круга R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом γ.

48. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

49. Высота пирамиды h. На каком расстоянии от вершины находится сечение, параллельное основанию и делящее ее объем пополам?

50. 25 метров медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найдите диаметр проволоки (плотность меди 8,94 г/см^3).
51. Насос, подающий воду в паровой котел, имеет два водяных цилиндра. Диаметры цилиндров 80 мм, а ход поршня 150 мм. Чему равна часовая производительность насоса, если каждый поршень делает 50 рабочих ходов в минуту?
52. Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя основание, чтобы объем увеличился в n раз? Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя высоту, чтобы объем увеличился в n раз?
53. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.
54. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.
55. Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса 25 м этой трубы?
56. Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.
57. Сосновое бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42 см и 25 см. Какую ошибку (в процентах) совершают, вычисляя объем бревна умножением площади его среднего поперечного сечения на длину?
58. Радиусы оснований усеченного конуса R и r; образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем.
59. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований R и r. Найдите объем конуса.
60. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, требуется превратить в равновеликий цилиндр такой же высоты. Чему равен радиус основания этого цилиндра?
61. По данным радиусам оснований R и r определите отношение объемов усеченного конуса и полного конуса.
62. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 3,5 м. Найдите объем кучи щебня.
63. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 м^2. Найдите объем конуса.
64. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания c. Найдите объем конуса.
65. Образующая конуса l составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем конуса.

66. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3. Определите массу стога сена.
67. Жидкость, налитая в конический сосуд 0,18 м высоты и 0,24 м в диаметре основания, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,1 м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?
68. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объем полученного тела вращения.
69. Прямоугольный треугольник с катетами a и b вращается около гипотенузы. Найдите объем полученного тела.
70. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см^3).
71. Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 25 см и 35 см. Найдите диаметр нового шара.
72. Имеется кусок свинца массой 1 кг. Сколько шариков диаметром 1 см можно отлить из куска? (Плотность свинца 11,4 г/см^3.)
73. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?
74. Внешний диаметр полого шара 18 см. Толщина стенок 3 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.
75. Сосуд имеет форму полушара радиуса R, дополненного цилиндром. Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объем V?
76. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?
77. Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?
78. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему целого шара?
79. Диаметр шара, равный 30 см, является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.
80. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см?
81. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Найдите объем полученного тела.

§ 21. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕЛ

ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим одну практическую задачу. Представим себе купол здания и плоский лист железа в форме квадрата со стороной 1 м. Пусть купол здания и лист железа окрашиваются. Если на окраску купола пошло V_1 л краски, а на окраску листа железа V_2 л краски, то естественно считать, что площадь купола здания в $\frac{V_1}{V_2}$ раз больше площади листа железа. Величина $\frac{V_1}{V_2}$ характеризует величину площади поверхности купола в сравнении с единицей площади в 1 м^2. Количество V_2 краски, необходимое для окраски листа железа, примерно равно объему параллелепипеда с квадратом 1×1 м в основании и высотой h, равной толщине красочного покрытия. Поэтому для оценки площади поверхности купола получается величина $\frac{V_1}{h}$.

Перейдем теперь к геометрическому определению площади поверхности. Пусть F — данная поверхность. Построим тело F_h, состоящее из всех точек пространства, для каждой из которых найдется точка поверхности F на расстоянии, не большем h. Наглядно тело F можно представить себе как тело, заполненное краской при окрашивании поверхности с обеих сторон слоем краски толщиной h.

Пусть V_h — объем тела F_h. *Площадью поверхности* F мы будем называть предел отношения $\frac{V_h}{2h}$ при $h \to 0$, т. е.

$$S = \lim_{h \to 0} \frac{V_h}{2h}.$$

Можно доказать, что для таких простых выпуклых поверхностей, как боковая поверхность призмы и пирамиды, данное определение дает прежнее значение площади поверхности — сумму площадей боковых граней.

ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

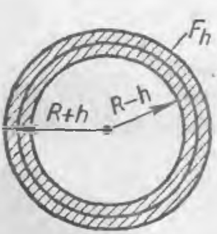


Рис. 322

Найдем площадь сферы. Пусть F — данная сфера радиуса R. Тело F_h, о котором идет речь в определении площади поверхности, представляет собой слой между двумя концентрическими сферами радиусов $R + h$ и $R - h$ (рис. 322). Объем этого тела равен разности объемов шаров радиусов $R + h$ и $R - h$, т. е.

$$V_h = \frac{4}{3}\pi[(R+h)^3 - (R-h)^3].$$

Имеем:

$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3\cdot 2h}(6hR^2 + 2h^3) = 4\pi R^2\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right).$$

При $h \to 0$ отношение $\frac{V_h}{2h}$ стремится к пределу $4\pi R^2$. Таким образом, ***площадь сферы радиуса R равна $4\pi R^2$.***

БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЦИЛИНДРА

Найдем площадь боковой поверхности цилиндра радиуса R и высоты H. Тело F_h, о котором идет речь в определении площади поверхности, в данном случае заключено между цилиндрическими поверхностями радиусов $R+h$, $R-h$ и двумя плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, отстоящими на расстояние $H+2h$ (рис. 323). Часть этого слоя, расположенная между двумя плоскостями оснований, отстоящими на расстояние H, целиком принадлежит телу F_h. Отсюда следует, что

$$V_h < [\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2](H+2h),$$
$$V_h > [\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2]H.$$

Или

$$4\pi RhH < V_h < 4\pi Rh(H+2h).$$

Отсюда

$$2\pi RH < \frac{V_h}{2h} < 2\pi RH + 4\pi Rh.$$

При $h \to 0$ правая часть неравенства стремится к $2\pi RH$. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{V_h}{2h} = 2\pi RH.$$

Таким образом, ***площадь боковой поверхности цилиндра*** определяется по формуле

$$S = 2\pi RH,$$

где R — радиус цилиндра, а H — высота.

Аналогично можно найти площадь боковой поверхности конуса и сферического сегмента.

Площадь боковой поверхности конуса равна

$$S = \pi Rl,$$

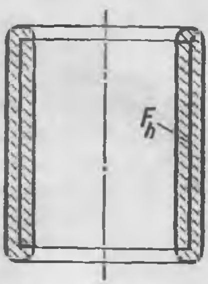


Рис. 323

где R — радиус основания конуса, а l — длина образующей.

Площадь поверхности сферического сегмента равна

$$S = 2\pi RH,$$

где R — радиус сферы, а H — высота сегмента.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Что такое площадь поверхности тела?
2. Выведите формулу для площади поверхности шара.
3. По какой формуле вычисляется площадь поверхности шарового сегмента?
4. Выведите формулу для боковой поверхности цилиндра.
5. По какой формуле находится площадь боковой поверхности конуса?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Поверхности двух шаров относятся как $m : n$. Как относятся их объемы?
2. Гипотенуза и катеты являются диаметрами трех шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?
3. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром 65 см имеет высоту 18 м. Сколько жести нужно для ее изготовления, если на заклепку уходит 10% материала?
4. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м длины и 5,8 м в диаметре. Найдите полную поверхность подвала.
5. Из круглого листа металла выштампован цилиндрический стакан диаметром 25 см и высотой 50 см. Предполагая, что площадь листа при штамповке не изменилась, найдите диаметр листа.
6. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения M. Чему равна полная поверхность цилиндра?
7. Конусообразная палатка высотой 3,5 м с диаметром основания 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?
8. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м, диаметр башни 6 м. Найдите поверхность крыши.
9. Площадь основания конуса S, а образующие наклонены к основанию под углом α. Найдите боковую поверхность конуса.
10. Как относятся между собой боковая и полная поверхности равностороннего конуса (в сечении — правильный треугольник)?
11. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей и осью конуса.

12. Радиус кругового сектора равен 3 м, его угол 120°. Сектор свернут в коническую поверхность. Найдите радиус основания конуса.
13. Сколько квадратных метров латунного листа потребуется, чтобы сделать рупор, у которого диаметр одного конца 0,43 м, другого конца 0,036 м и образующая 1,42 м ?
14. Сколько олифы потребуется для окраски внешней поверхности 100 ведер конической формы, если диаметры ведер 25 см и 30 см, образующая 27,5 см и если на 1 $м^2$ требуется 150 г олифы?
15. Полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Докажите.
16. Поверхность *тела*, образуемого вращением квадрата около стороны, равновелика поверхности шара, имеющего радиусом сторону квадрата. Докажите.
17. Радиус шара 15 см. Какую площадь имеет часть его поверхности, видимая из точки, удаленной от центра на 25 см?
18. Шар радиуса 10 см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия 12 см. Найдите полную поверхность тела.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

§ 1.

7. Не более одной. **10.** 1), 2), 4) Пересекает; 3), 5), 6) не пересекает. **11.** 6 отрезков. **14.** 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. **17.** 1), 2) Не принадлежит, 3) принадлежит. **18.** 1), 2) Не может. **19.** Не могут. **20.** Не могут. **21.** Не могут. **22.** 0,5 м или 5,9 м. **23.** Отрезок AB. **24.** Не может. **25.** 1) $AC = 9$ м, $BC = 6$ м; 2) $AC = 10$ м, $BC = 5$ м; 3) $AC = BC = 7{,}5$ м; 4) $AC = 6$ м, $BC = 9$ м. **27.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **28.** 2), 3) Не может. **29.** Угол (ab) больше. **30.** 1) $\angle(ac) = 45°$, $\angle(bc) = 15°$; 2) $\angle(ac) = 40°$, $\angle(bc) = 20°$; 3) $\angle(ac) = \angle(bc) = 30°$; 4) $\angle(ac) = 24°$, $\angle(bc) = 36°$. **33.** Не существует. **34.** Одна. **36.** 1) 1,2 м; 2) 2,4 см. **38.** 11 см. **39.** 100°. **41.** $PQ = 5$ см, $QR = 6$ см, $PR = 7$ см. **42.** $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. **44.** В $\triangle ABC$: $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. **46.** Нельзя. **47.** Не может.

§ 2.

1. 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) не могут; 3) могут. **4.** 1) 105° и 75°; 2) 110° и 70°; 3) 45° и 135°. **5.** 1) 72° и 108°; 2) 54° и 126°; 3) 55° и 125°; 4) 88° и 92°. **6.** 150°, 150°, 30°. **7.** 130°. **9.** 144° и 36°. **10.** 65° и 115°. **11.** Все углы прямые. **13.** 1) Не может; 2) не может. **14.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **15.** $\angle(a_1b) = 120°$, $\angle(a_1c) = 150°$, $\angle(bc) = 30°$. **17.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 170°. **18.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **19.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **21.** Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 20 и теоремой 2.3. **22.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **23.** 2) Указание. Соедините отрезком точки A и C и воспользуйтесь утверждением задачи 23, 1).

§ 3.

10. 0,3 м. **11.** 3,5 м. **12.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **21.** Указание. Воспользуйтесь свойством медианы в равнобедренном треугольнике. **25.** 15 м. **26.** 15 м. **29.** Указание. Воспользуйтесь утверждением задачи 28. **38.** Указание. Продлите медианы на их длину. **40.** Указание. Продлите медианы на их длину.

§ 4.

2. Углы AB_1C_1 и AC_1B_1 и углы BB_1C_1 и CC_1B_1 внутренние односторонние, а углы AB_1C_1 и CC_1B_1 и углы BB_1C_1 и AC_1B_1 внутренние накрест лежащие. **8.** 105° и 75°. **9.** 75°. **10.** Три угла по 72° каждый и четыре угла по 108° каждый. **11.** Не может. **13.** 90°. **14.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. **15.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **16.** Не может. **17.** Не может. **18.** 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. **19.** 1) 50°; 2) 30°; 3) 75°. **20.** 40°, 40°. **21.** 70° и 40° или 55° и 55°. **22.** Два угла равны $120° - \frac{2}{3}\alpha$ и один $\frac{4}{3}\alpha - 60°$. **24.** 1) $180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; 2) $90° + \frac{\gamma}{2}$. **25.** 110°, 35°, 35°. **26.** 60°, 30° и 90°. **27.** 110°. **29.** α. **30.** Углы $\triangle ABD$: $\angle A = \alpha$, $\angle D = 90°$, $\angle B = 90° - \alpha$, углы $\triangle CBD$: $\angle D = 90°$, $\angle B = \alpha + \beta - 90°$, $\angle C = 180° - \alpha - \beta$. **32.** 60°. **33.** $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle E = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle DBE = \angle B + \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$. **34.** 140°, 10°. **36.** 90°, 45°, 45°. **37.** $\angle D = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 30°$. **38.** 150°. **39.** 90°.

§ 5.

1. Указание. Отложите на луче отрезок, равный радиусу. 2. См. задачу 1. 5. 60°. 6. 120°. 7. Не может. 9. 30°. 10. 60° и 120°. 11. 70 см, 10 см. 12. Не могут. 13. 1) Не могут; 2) не могут. 25. Указание. Начните с построения равностороннего треугольника. 27. Указание. В искомом треугольнике продлите медиану на ее длину. 32. Указание. Начните с построения высоты. 36. См. задачу 42 § 4. 37. См. задачу 36. 45. Указание. Центр искомой окружности лежит на биссектрисе угла. 46. 10 см. 47. 5 см. 50. См. задачу 49. 52. α или $180^\circ - \alpha$. 53. 150°. 54. Указание. 1) Точка касания, данная точка и центр окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. 2) Сведите решение задачи к предыдущей, построив вспомогательную окружность, концентричную одной из данных, радиусом, равным сумме или разности радиусов данных окружностей. 59. Указание. Воспользуйтесь свойством углов, вписанных в окружность.

§ 6.

3. Три. 4. 10 м. 5. 3 см. 7. $BC = AD = 4{,}8$ м. 8. 40°, 140°, 140°. 9. 115° и 65°. 10. Не могут. 11. 60°, 60°, 120°, 120°. 12. 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. 13. 1) 55°, 55°, 125°, 125°; 2) 35°, 35°, 145°, 145°; 3) 20°, 20°, 160°, 160°. 16. $BE = 9$ см, $CE = 6$ см. Указание. Докажите, что треугольник ABE равнобедренный с основанием AE. 17. 0,6 м и 0,8 м. 18. $AB = BD = 1{,}1$ м; $AD = 0{,}8$ м. 23. 60 см. 24. 10 см и 18 см. 25. 12 см, 20 см. 26. 12 см. 27. 10 см и 25 см или 7,5 см и 18,75 см. 30. 80° и 100°. 32. 60° и 120°. 35. 4 м. 37. 2 м. 38. 2 м. 39. 4 м, 8 м. 40. 1 м. 41. 10 см. 42. 4 см, 5 см, 6 см. 43. 6 см. 44. 6 см, 5 см, 5 см. 48. 5 м, 6 м. 49. $a + b$. 52. 3 м, 4 м. 54. 70° и 110°. 55. 1,7 м. 56. 24 см, 36 см. 57. 60° и 120°. 58. 15 м. 59. 3 см. 61. 4 м, 6 м. 62. 2,2 м. 63. 9 см и 5 см. 64. a. 65. Указание. Постройте сначала треугольник, две стороны которого равны боковым сторонам трапеции, а третья — разности оснований. 66. Указание. Постройте сначала треугольник, две стороны которого равны диагоналям трапеции, а третья — сумме ее оснований. 68. Указание. Воспользуйтесь свойством углов, отложенных в одну полуплоскость (теорема 2.4).

§ 7.

3. 5 м или $\sqrt{7}$ м. 4. 1) 5 см; 2) 17 дм; 3) 6,5 м. 5. 109 см. 6. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 7. Нельзя. 8. $\frac{25}{3}$, $\frac{20}{3}$. 9. 1) 15 см, 20 см; 2) 60 м, 80 м. 11. Указание. Искомый отрезок — высота прямоугольного треугольника, основание которой делит гипотенузу на отрезки a и b. 12. $\sqrt{116}$ м $\approx 10{,}8$ м. 13. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. 14. 32 см, 60 см. 15. 15 см. 17. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 18. 24 см. 19. 36 см, 54 см. 20. 25 см или 11 см. 22. 1) 24 см; 2) 24 см. 23. 12 см, 11,2 см, $\frac{168}{13}$ см. 24. 13,44 см. 25. 2) Нельзя. 26. 10 см, 6 см. 27. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. 28. $R = \frac{169}{24}$ см, $r = \frac{10}{3}$ см. 29. $90^\circ - \alpha$,

$a \cos \alpha$, $a \sin \alpha$. 30. $90° - \alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$, $\frac{a}{\sin \alpha}$. 33. 1) $\sin 16° = 0{,}2756$, $\cos 16° = 0{,}9613$; 2) $\sin 24°36' = 0{,}4163$, $\cos 24°36' = 0{,}9092$; 3) $\sin 70°32' = 0{,}9428$, $\cos 70°32' = 0{,}3333$; 4) $\sin 88°49' = 0{,}9998$, $\cos 88°49' = 0{,}0206$. 34. 1) $x = 1°$; 2) $x = 30°6'$; 3) $x = 47°3'$; 4) $x = 86°9'$. 35. 1) $\operatorname{tg} 10° = 0{,}1763$; 2) $\operatorname{tg} 40°40' = 0{,}8591$; 3) $\operatorname{tg} 50°30' = 1{,}213$; 4) $\operatorname{tg} 70°15' = 2{,}785$. 36. 1) $x = 17°53'$; 2) $x = 38°7'$; 3) $x = 80°46'$; 4) $x = 83°50'$. 37. $31°25'$; $31°25'$; $117°10'$; 23,8 см. 38. $34°10'$ и $55°50'$. 39. $51°$. 40. $116°16'$ и $63°44'$. 41. $29°52'$ и $150°8'$. 42. 12 м, $45°14'$. 43. $60°16'$. 44. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 45. 1) а) 5; $36°52'$; $53°8'$; б) 41; $12°41'$; $77°19'$; в) 29; $43°36'$; $46°24'$; г) 61; $10°23'$; $79°37'$. 2) а) 12; $22°37'$; $67°23'$; б) 24; $16°16'$; $73°44'$; в) 15; $28°4'$; $61°56'$; г) 13; $81°12'$; $8°48'$. 3) а) $70°$; 0,68; 1,88; б) $39°40'$; 3,08; 2,55; в) $19°24'$; 7,55; 2,66; г) $13°39'$; 15,55; 3,78. 4) а) $59°33'$; 5,92; 5,10; б) $49°12'$; 7,65; 5,79; в) $29°25'$; 8,04; 3,95; г) $22°$; 9,71; 3,64. 46. 1) $\cos^2 \alpha$; 2) $\sin^2 \alpha$; 3) 2; 4) $\sin^3 \alpha$; 5) 1; 6) $\sin^2 \alpha$; 7) 1; 8) $\sin^2 \alpha$; 9) $1 + \operatorname{tg}^6 \alpha$. 47. 1) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$; 2) $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$; 3) $\sin \alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. 48. 1) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos \alpha = \frac{9}{41}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{40}{9}$; 3) $\cos \alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$. 50. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 51. $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. 52. 29 см. 53. $(\sqrt{3} - 1)$ м $\approx 0{,}732$ м, $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$ м $\approx 0{,}517$ м. 54. $60°$ и $120°$. 55. $60°, 60°, 120°, 120°$. 56. 1), 6) α; 2), 3), 4), 5) β. 57. BC. 58. $\angle A$. 59. 3 м. 62. Не может. 63. 2 м. 67. Точка пересечения отрезков AB и CD. 68. Не могут. 71. $R - d$, $R + d$. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника. 72. $d + R$, $d - R$. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника. 73. Не могут. 74. Не могут. 75. Указание. Сравните расстояние между центрами окружностей с их радиусами. 76. Не могут.

§ 8.

3. 2. 4. 3. 5. (2, 0). 6. (0, 3). 7. Прямая, параллельная оси y. 8. Две прямые $x = 3$ и $x = -3$. 10. Положительную. 11. 4 (3). 12. 5. 13. $x = 2$. 14. $x = -2$. 15. Прямая, содержащая биссектрисы I и III четвертей. 16. Прямая, содержащая биссектрисы II и IV четвертей. 18. $(0, -2)$. 19. $(1, 1)$. 20. $(3, 3)$. 23. 1) 2; 2) 4. 25. $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 5$. 26. Точка B. 28. $(3, 3)$ и $(15, 15)$. 29. $(3, 4)$, $(-4, 3)$, $(0, 5)$. 30. $(5, 12)$ и $(5, -12)$; $(5, -12)$ и $(-5, -12)$. 31. $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. 32. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. 34. См. задачу 33. 35. 1), 3), 4) нельзя, 2) можно. 36. $(-2, 0)$ или $(4, 0)$. 37. $(7, 0)$ и $(1, 0)$. 38. $(2, 2)$ и $(-2, -2)$. 39. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. 40. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. 43. $x + y = 2$. 44. 1) $(-3, 0)$, $(0; -1{,}5)$; 2) $(4, 0)$, $(0, 3)$; 3) $(-2, 0)$; $(0, 3)$; 4) $(2{,}5; 0)$, $(0, -5)$. 45. $(-1, 1)$; $(3, -2)$. 46. 1) $(1, -2)$; 2) $(2, 4)$; 3) $(0{,}5; -2)$. 48. 1) $x + y = 5$; 2) $3x + 10y = 2$; 3) $x + 6y = -13$. 49. $a = b = \frac{1}{3}$. 50. -3. 51. $\pm\sqrt{2}$. 52. Указание. Найдите точку пересечения двух прямых и проверьте, лежит ли она на третьей прямой. 54. $y = 3$. 56. $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$; $\sin 135° =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} 135° = -1$; $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. 57. $\sin 160° = 0{,}3420$; $\cos 140° = -0{,}7660$; $\operatorname{tg} 130° = -1{,}192$. 58. 1) $\sin 40° = 0{,}6428$; $\cos 40° = 0{,}7660$; $\operatorname{tg} 40° = 0{,}8391$; 2) $\sin 14°36' = 0{,}2521$; $\cos 14°36' = 0{,}9677$; $\operatorname{tg} 14°36' = 0{,}2605$; 3) $\sin 70°20' = 0{,}9417$; $\cos 70°20' = 0{,}3365$; $\operatorname{tg} 70°20' = 2{,}798$; 4) $\sin 30°16' = 0{,}5040$; $\cos 30°16' = 0{,}8637$; $\operatorname{tg} 30°16' = 0{,}5836$; 5) $\sin 130° = 0{,}7660$; $\cos 130° = -0{,}6428$; $\operatorname{tg} 130° = -1{,}192$; 6) $\sin 150°30' = 0{,}4924$; $\cos 150°30' = -0{,}8704$; $\operatorname{tg} 150°30' = -0{,}5658$. 59. $\alpha_1 \approx 11°32'$ или $168°28'$; $\alpha_2 \approx 134°26'$; $\alpha_3 \approx 158°12'$. 60. 1) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. 61. 1) $\cos\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$ или $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$. 62. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$.

§ 9.

12. 1) Не могут, 2) не могут. 15. Не может. 20. Отрезок. 21. Прямая. 22. Бесконечное множество. На прямой, параллельной данным и равноотстоящей от них. 23. Три. 25. Две. 26. Бесконечное множество. 29. Указание. Воспользуйтесь преобразованием симметрии относительно данной точки. 30. Указание. Воспользуйтесь симметрией относительно прямой b. 35. Окружность. Указание. Воспользуйтесь гомотетией относительно общего конца хорд. 38. Указание. Воспользуйтесь гомотетией относительно вершины треугольника, противолежащей данной стороне. 39. 0,8 м; 1 м; 1,2 м. 40. 10 м, 25 м, 20 м. 42. 13,6 см. 43. $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м. 44. $AC = 24$ см, $A_1C_1 = 18$ см, $B_1C_1 = 15$ см. 46. 15 см, 20 см, 25 см. 47. 21 см. 49. $\frac{ah}{a+h}$. 50. $A_1C_1 = 1{,}2$ м; $AC = 3$ м. 51. 1) Не подобны; 2) подобны. 52. 1) Подобны; 2) не подобны. 53. 1) Подобны; 2) не подобны. 55. $\frac{m}{n}$. 56. 4 см. 57. $\frac{27}{28}$. 58. 1) 14 см; 2) 6 дм. 59. Указание. На одной стороне угла отложите от его вершины отрезки a и b, а на другой — отрезок c. Проведите через конец отрезка a прямую, параллельную прямой, которая проходит через концы отрезков b и c. 60. Подобны. 61. 1) да; 2) да; 3) нет. 62. 1 м, 2 м, 2,5 м. 63. 6,5 м, 5,5 м. 64. ≈ 42 м. 66. $\frac{bc}{b+c}$. 67. $m : n$. 68. $n : m$. 69. $AC = 18$ м. Указание. Треугольники ACD и CBA подобны. 70. $m : n$. 71. 15 см, 18 см. 72. 4,5 см. 73. $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. 77. $\approx 225{,}8$ км (см. задачу 76). 78. $\approx 82{,}4$ км (см. задачу 76).

§ 10.

1. (1, —1), (2, —1), (1, 1). 2. 1) $a = b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = b = 1$. 4. 1) Не существует; 2) существует. 7. Одинаково направленные лучи: AB и DC, BC и AD, CD и BA, DA и CB. Противоположно направленные лучи: AB и CD, BC и DA, DC и BA, AD и CB. 8. Векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ одинаково направлены, вектор $\overline{BA}$ и любой из векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ противоположно направлены. 11. См. задачу 10. 14. $m = \pm 12$. 15. $n = \pm 7$. 17. 1) $\overline{(3, -5)}$; 2) $\overline{(-1, 1)}$; 3) $\overline{(1, 0)}$; 4) $\overline{(-3, 2)}$; 5) $\overline{(1, 5)}$. 18. 1) $\overline{(0, 1)}$; 2) $\overline{(-5, 3)}$; 3) $\overline{(1, -1)}$; 4) $\overline{(-1, 1)}$; 5) $\overline{(-1; -2)}$. 20. 1) 5; 2) 10; 3) 13. 21. 1) 13; 2) 10; 3) 17. 24. 1) $\bar{b}(6, 8)$; 2) $\bar{b}(-6, -8)$. 25. 1) $\overline{(-6, -8)}$; 2) $\overline{(9, 7)}$; 3) $\overline{(12, 7)}$. 26. 1) 10; 2) 13; 3) 15. 27. 1) 15; 2) 39; 3) 30. 28. 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) ± 1; 3) $\pm\frac{5}{13}$. 30. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ одинаково направлены, векторы $\bar{b}$ и $\bar{d}$ противоположно направлены; $|\bar{a}| = |\bar{d}|$, $|\bar{b}| = |\bar{c}|$. 32. $n = 2$. 33. Единичные векторы $\bar{a}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$; векторы $\bar{a}$ и $\bar{d}$ коллинеарны. 34. $\overline{(0,6; 0,8)}$. 37. $\overline{(2, -3)}$. 38. $\lambda = -5$, $\mu = 4$. 40. 90°. 41. $\sqrt{3}$. 42. 30°. 43. $\cos A = 0{,}6$; $\cos B = 0$; $\cos C = 0{,}8$. 44. $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. 46. $m = -\frac{8}{3}$. 48. $\lambda = -\frac{1}{2}$. 53. 1) $\overline{OX} = \frac{\mu\bar{a} + \lambda\bar{b}}{\mu + \lambda}$.

§ 11.

2. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$. 3. $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 \pm 2cd\cos\alpha}$. 4. $\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\alpha}$. 7. 13 м или $\sqrt{1513}$ м $\approx$ 38,9 м. 8. $\frac{5}{13}, \frac{33}{65}, \frac{3}{5}$. 10. Больше отрезок AD. 12. Сторона AB наибольшая, сторона BC наименьшая. 13. Угол B наибольший, угол C наименьший. 14. Боковая сторона больше. 20. Сторона AB увеличивается. 22. Не может. 23. Не может. 24. $AB = \frac{AC\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. 25. $x = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

26. 1) $\alpha = 105°$, $b \approx 2{,}59$, $c \approx 3{,}66$;
2) $\alpha = 45°$, $b \approx 17{,}93$, $c \approx 14{,}64$;
3) $\alpha = 20°$, $b \approx 65{,}78$, $c \approx 88{,}62$;
4) $\gamma = 119°$, $a \approx 16{,}69$, $c \approx 24{,}83$;
5) $\gamma = 68°$, $a \approx 13{,}57$, $b \approx 11{,}22$.

27. 1) $\alpha \approx 79°6'$, $\beta \approx 40°54'$, $c \approx 10{,}58$;
2) $\alpha \approx 11°2'$, $\beta \approx 38°58'$, $c \approx 28{,}02$;
3) $\beta \approx 26°45'$, $\gamma \approx 58°15'$, $a \approx 19{,}92$;
4) $\beta \approx 20°30'$, $\gamma \approx 14°30'$, $a \approx 22{,}92$;

5) $\alpha \approx 16°20'$, $\gamma \approx 11°40'$, $b \approx 53{,}41$;
6) $\alpha \approx 129°50'$, $\gamma \approx 35°10'$, $b \approx 8{,}09$.

28. 1) $c \approx 8{,}69$, $\beta \approx 21°9'$, $\gamma \approx 38°51'$;
2) $c \approx 19{,}63$, $\beta \approx 12°53'$, $\gamma \approx 29°7'$;
3) $c \approx 22{,}30$, $\beta \approx 5°35'$, $\gamma \approx 10°25'$.
4) Решения не имеет.
5) $c \approx 11{,}40$, $\beta \approx 41°49'$, $\gamma \approx 108°11'$
или $c \approx 2{,}46$, $\beta \approx 138°11'$, $\gamma \approx 11°49'$.

29. 1) $\alpha \approx 28°57'$, $\beta \approx 46°34'$, $\gamma \approx 104°29'$;
2) $\alpha \approx 53°35'$, $\beta \approx 13°18'$, $\gamma \approx 113°7'$;
3) $\alpha \approx 34°3'$, $\beta \approx 44°25'$, $\gamma \approx 101°32'$;
4) $\alpha \approx 38°38'$, $\beta \approx 92°50'$, $\gamma \approx 48°32'$;
5) $\alpha \approx 14°58'$, $\beta \approx 11°$, $\gamma \approx 154°2'$;
6) $\alpha \approx 135°35'$, $\beta \approx 15°30'$, $\gamma \approx 28°55'$.

30. Указание. Воспользуйтесь задачей 2.

§ 12.

2. R_1+R_2-d, R_1-R_2-d. 6. Не может. 9. 36°, 72°, 108°, 144°. 10. 1) 8; 2) 12. 11. 1) 10 сторон; 2) 15 сторон. 12. Указание. У этого n-угольника все стороны равны, все углы равны. 13. Указание. У этого n-угольника все стороны равны, все углы равны. 16. $\frac{1}{2}n\,(n-1)$. 18. Указание. Выразите оба радиуса через сторону треугольника. 19. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Указание. Найдите сначала радиус окружности. 20. $2\sqrt{6}$ дм. 21. $2\sqrt{2}$ см. 22. $\sqrt{3}$ см. 24. Указание. Воспользуйтесь теоремой косинусов. 25. Указание. Сначала с помощью задачи 73 § 9 найдите сторону 10-угольника, а затем по теореме косинусов — сторону 5-угольника.

$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, $a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. 26. $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$.

27. $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. 28. $b = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$. 29. $a = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}$.

30. Указание. Впишите сначала правильный шестиугольник. 31. Указание. Опишите сначала квадрат. 32. 1) 62,8 м; 2) 94,2 м. 33. 6,28 мм. 34. $\approx 3{,}06$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 23. 35. $\approx 3{,}11$. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 24. 36. $\approx 6366{,}2$ км. 37. $\approx 6{,}3$ см. 38. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{3}$. Указание. Центры кругов являются вершинами правильного n-угольника. 39. 1) $R(3+2\sqrt{3})$; 2) $R(1+\sqrt{2})$; 3) R. Указание. Центры кругов являются вершинами правильного n-угольника. 40. $\approx 351{,}9$ м/мин. 41. 1) 300° и 60°; 2) 230° и 130°; 3) 190° и 170°. 42. 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°; 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. 43. 31″. 44. 1) $\approx 0{,}79$ м; 2) $\approx 0{,}52$ м; 3) $\approx 2{,}09$ м; 4) $\approx 0{,}80$ м; 5) $\approx 1{,}06$ м; 6) $\approx 2{,}63$ м. 45. 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. Указание.

По хорде и соответствующему центральному углу найдите радиус окружности. 46. 1) $\frac{3}{\pi}l$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}l$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}l$. Указание. Найдите сначала радиус окружности. 47. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$.

§ 13.

1. Указание. Примените теорему Пифагора. 2. ≈ 180 м. 3. $S = \frac{a^2}{2}$. 4. В два раза. 5. Площадь увеличится в 9 раз. 6. В 5 раз. 7. 8 м, 18 м. 8. 12 дм, 25 дм. 9. 30°. 10. Квадрат. 11. 200 см². 12. 202,8 см². 14. $\sqrt{15}$ см. 17. $\angle C = 90°$. 18. $\approx 0{,}47$ м². 19. 5,64 м². 20. $\frac{a^2}{2}\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. 21. Указание. Воспользуйтесь утверждением задачи 16. 25. 4800 м². 26. $\frac{a^2}{4}$. 27. 6 см. 29. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. 30. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. 31. 600 см². 32. 55 см, 48 см. 33. 84. 34. 11,2. 35. 480 см². 36. 540 м². 39. 1) $R = \frac{65}{8}$, $r = 4$; 2) $R = \frac{65}{8}$, $r = 1{,}5$; 3) $R = \frac{145}{6}$, $r = \frac{7}{3}$; 4) $R = \frac{35}{\sqrt{96}} \approx 3{,}6$; $r = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}2$. 40. 4,5 см. 42. $R = 29$ см, $r = 12$ см. 43. $\frac{l^2}{4\pi}$. 44. 1) $20\,\pi$ см²; 2) $12\,\pi$ м²; 3) $\pi(a^2 - b^2)$. 45. 1) В 4 раза; 2) в 25 раз; 3) в m^2 раз. 46. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 47. $\frac{1}{4}$. 48. 2. 49. 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$. 50. 1) $\frac{R^2}{2}$; 2) $\frac{Rl}{2}$. 51. $a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 52. 1) $(\pi - 2)R^2$; 2) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

§ 14.

2. Можно. 6. Указание. Возьмите точку в другой плоскости и проведите через нее и данную прямую плоскость. Примените к этой плоскости аксиому параллельных. 10. Четыре плоскости. 12. См. задачу 11.

§ 15.

4. 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. 5. 1) 1 м; 2) 0,6 дм; 3) 2,1 см; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. 6. 1) 37,5 см; 2) 9,9 см; 3) 15 см; 4) $c\left(1 + \frac{b}{a}\right)$. 7. 1) 7 м; 2) 2 м; 3) $a + c - b$. 8. Нельзя. 12. 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. 15. Не могут. 19. См. задачу 16. 20. Не всегда. См. задачу 16. 26. Решения *нет*, если

точка лежит в плоскости прямых 32. $A_1B_1 = a$. 35. Указание. Сравните отношение отрезков двух произвольных прямых: $X_1X_2X_3$ и $Y_1Y_2Y_3$. 37. Окружность. 38. Окружность. 40. Средней линией. 41. Не может. 42. Может. 43. Указание. Отношение отрезков сохраняется. 44. Указание. Проекция перпендикулярного диаметра проходит через середины хорд, параллельных проекции данного диаметра

§ 16.

2. См. задачу 1. 3. 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2 - b^2 + d^2}$; 4) $\sqrt{a^2 - c^2 + 2d^2}$. 8. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. 11. Окружность. 12. 6 см, 15 см. 13. 15 см, 41 см. 14. 4 см, 8 см. 15. 9 см. 18. $\sqrt{b^2 - a^2}$. 19. $\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$. 20. 0,36 м или 0,44 м. 23. 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. 24. 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. 25. 0,6 м. 26. 9 м. 27. $\frac{am}{m+n}$ (m соответствует основанию, через которое проведена плоскость). 28. $\frac{a}{2}$. 29. 2,6 м. 30. $\approx 3,9$ м. 31. $\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$. 33. 2,5 м. 34. 6 м. 35. 14 см. 36. $\sqrt{a^2 + b^2}$. 37. $\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{8}}$. 38. Длина перпендикуляра $\sqrt{2a^2 - b^2}$, длина стороны $\sqrt{b^2 - a^2}$. 39. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, $\sqrt{c^2 - a^2}$, $\sqrt{c^2 - b^2}$. 40. $\sqrt{2b^2 - a^2}$. 41. 2 м. 42. $\sqrt{2}$ м. 43. $2\sqrt{2}$ м. 44. 6 м. 45. 5 м, 3 м. 46. 1 м. 47. 2,5 м. 48. 6,5 м. 49. $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$. 50. $BD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $CD = \sqrt{a^2 + c^2}$. 51. $\sqrt{b^2 + c^2 - \frac{b^4}{a^2}}$. 53. Указание. Прямые, перпендикулярные плоскости, параллельны. 54. 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; 6) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. 55. $\sqrt{a^2 + b^2}$. 56. $\sqrt{23}$ м. 57. 4 м. 58. 1,3 м. 59. 1,7 м.

§ 17.

2. (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3); (1, 2, 0), (1, 0, 3), (0, 2, 3). 3. Расстояние от плоскости xy равно 3, от плоскости xz равно 2, от плоскости yz равно 1; расстояния от осей x, y, z соответственно равны $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$; расстояние от начала координат равно $\sqrt{14}$. 5. (2, 2, 2) и (—2, —2, —2). 6. C (0, 0, 0). 7. $x + 2y + 3z = 7$. 11. B (0, —1, 3). 12. 1) D (6,2, —2); 2) D (0, —2,2); 3) D (—1, 7, —2). 16. (—1, —2, —3), (0, 1, —2), (—1, 0, 3). 18. (—1, —2, 1). 19. 1), 2), 4) не существует; 3) существует. 21. 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 22. 30° 23. 13 м. 25. 1) $\cos\alpha = \frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha = \frac{2}{21}$. 26. 30°. 27. $a\sqrt{6}$. 28. $a\sqrt{2}$. 29. 30°. 30. $3a$. 31. 3,36 м. 33. 1) D (—2, 3, 0); 2) D (2, 1, —2). 34. 1) $n = \frac{4}{3}$, $m = \frac{9}{2}$; 2) $m = -2$, $n = -2,5$; 3) $m = 4$, $n = 6$. 36. 1) $n = \frac{1}{3}$;

2) $n=-1$; 3) $n=2$; 4) $n=4$. 37. $c=1$. 38. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+|a|\cdot|b|}$. 39. 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. 41. $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$. 42. $\cos\varphi=\cos\alpha\cdot\cos\beta$. 43. 60°. 44. $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. 45. $\bar{e}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ или $\bar{e}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 46. $\bar{e}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 47. $a_1=a_2=0$, $a_3\neq 0$. 48. $a=b=0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$. 50. 1) $3x-y-z+6=0$; 2) $3x+3y-2z-5=0$; 3) $x-5y+3z-38=0$. 51. $\left|\frac{d}{a}\right|, \left|\frac{d}{b}\right|, \left|\frac{d}{c}\right|$. 55. $k=\lambda a$, $l=\lambda b$, $m=\lambda c$, $\lambda\neq 0$. 56. $kx+ly+mz=0$. 57. 1) $(2, 1, -2)$; 2) $(4{,}5; 1{,}5; 0{,}5)$; 3) $(-2, -7, -28)$; 4) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. 58. Указание. Сложите почленно первое и третье уравнения. 59. 1) $c=0$, $d\neq 0$; 2) $c=d=0$. 60. $c=0$ (см. задачу 59). 61. Указание. Найдите какой-нибудь вектор, перпендикулярный вектору (2, 3, 1). 62. Указание. Найдите вектор, перпендикулярный векторам (2, 3, 1) и (1, 1, 1).

§ 18.

2. 60°. 4. $\cos\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. 5. 144 см². 6. 7,5 см. 7. 12 см. 9. $3a^2$. 10. $\cos x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 11. $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. 12. 22 см. 13. $Q\sqrt{2}$. 14. 12. 15. 2 м. 16. 4 м. 18. 45 см². 19. 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. 20. $3l^2\sqrt{3}$. 21. 1) 3; 2) 7; 3) 11. 22. 13 м, 9 м. 23. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. 25. $2a$, $a\sqrt{2}$. 26. 2 м². 27. 2 м², 3 м². 29. 1464 см². 30. $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. 31. 188 м². 32. ≈ 262 см². 34. 3 см. 37. 11 м. 38. $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 39. $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. 40. $2\sqrt{3}$ см. 41. $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. 42. 9 см. 43. 5 см, 6 см. 44. $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 45. 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. 46. 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}$. 47. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}(a+\sqrt{a^2+12h^2})$; 2) $a(a+\sqrt{a^2+4h^2})$; 3) $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2})$. 48. $2r(r\sqrt{3}+\sqrt{3a^2-r^2})$. 49. 1,8 м, 4 м. 50. $3a^2$. 52. $\cos\varphi=\frac{Q}{S}$. 53. 16 см и 6 см или 12 см и 8 см. 54. $\sqrt{2}$ см. 55. 26 м². 56. 540 см². 57. 10 м². 59. 9 см. 60. 1 дм. 61. 6 см. 62. 2 см. 63. $\frac{a^2-b^2}{4}$. 64. $20\sqrt{2}$. 65. 24 м², 30°. 66. 168 м². 67. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+$

$+ b^2 + (a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2}$; 2) $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\frac{3}{2}(\sqrt{3}(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2})$. 71. 109°28′. Указание. Докажите сначала, что в каждой вершине октаэдра сходится две пары перпендикулярных ребер. Затем примените формулу задачи 4.

§ 19.

1. 5 м. 3. 36 см². 4. 3 дм. 5. 3 дм. 6. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. 8. 10 м. 9. 5 м. 10. $\frac{l}{2}$. 11. R^2. 13. 500. 14. $\frac{R^2 \operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\varphi}$, если $\alpha+\varphi<90°$. 16. $\frac{H}{\sqrt{2}}$. 17. $\frac{3l}{4}$. 18. 3 см. 19. $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. 20. $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. 21. 5 м. 22. $R-r$. 23. a, $2a$. 24. 30 дм². 25. 9 дм². 26. $\frac{1}{4}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$. 28. 16π м². 30. $\frac{\pi R^2}{4}$. 31. $\frac{\pi R^2}{4}$. 32. πR. 33. ≈ 785 км. 34. 12 см. 35. 12 см. 39. 3 см. 40. 8 см. 41. $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. 42. 5 см. 44. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z\pm1)^2=9$. 46. 4π м. 47. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 48. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 49. $R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. 50. 1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. 51. $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$. 52. $R=\frac{a}{2\sin2\alpha\cdot\sin\frac{180°}{n}}$.

53. $R=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos\alpha}}$; $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. 54. $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

§ 20.

1. 6 см. 2. $\approx 8{,}4$ г/см³. 4. 25 см. 5. 1,8 г/см³. 6. $\approx 2{,}29$ м. 7. 30 м. 8. Вдвое. 10. 60 см³. 11. 3 м³. 12. $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. 13. $\sqrt{2}$ м³. 14. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. 15. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. 16. 0,5 г/см³. 17. $\approx 192{,}72$ кг. 18. 3 см³. 19. $\frac{a^3}{8}$. 20. 6 м³. 22. 3060 м³. 23. 6048 м³/час. 24. 35 200 м³. 25. 48 см³. 26. 12 см³. 27. 2 см. 28. $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. 29. $a^3\sin\alpha\cdot\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. 30. $2\sqrt{\sin3\alpha\cdot\sin^3\alpha}$. 31. $abc\sqrt{-\cos2\alpha}$. 32. $\frac{h^3\sin\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. 33. 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. 34. $\frac{3}{4}a^3$. Указание. Высота пирамиды равна радиусу

окружности, вписанной в основание. 35. $\frac{1}{6}b^3$. 36. $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. 37. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. 38. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Указание. Разбейте октаэдр на две правильные четырехугольные пирамиды. 39. 360 $м^3$. 40. 48 $см^3$. Указание. Основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды. 41. $\sqrt{11}$ $см^3$. 43. $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. 44. $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. Указание. Воспользуйтесь формулой задачи 42. 45. $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. 46. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cdot\cos\beta\times\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. 47. $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$. 49. $\frac{h^3}{\sqrt{2}}$. 50. $\approx$0,75 мм. 51. $\approx$4500 л. 52. В n раз; в $\sqrt{n}$ раз. 53. 4 : 1. 54. $\frac{3}{4}\pi a^3$. 55. $\approx$61 кг. 57. $\approx$2%. 58. $\frac{\pi}{3}|R^3-r^3|$. 59. $\frac{\pi^2}{3}|R^3-r^3|$. 60. 14 см. 61. $1-\left(\frac{r}{R}\right)^3$, если $r<R$. 62. $2\pi\sqrt{\frac{11}{3}}$ $м^3\approx 12$ $м^3$. 63. 9π $м^3$. Указание. Высота конуса равна радиусу его основания. 64. $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2l^2-c^2}$. 65. $\frac{1}{3}\pi l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. 66. $\approx$1,6 т. 67. $\approx$0,35 м. 68. $\frac{\pi a^3}{4}$. 69. $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. 70. $\approx$ 14 см. 71. $\approx$ 39 см. 72. 167. 73. $33\frac{1}{3}$%. Указание. Диаметр шара равен диаметру цилиндра. 74. $\approx$ 2148 $см^3$. 75. $\frac{V}{\pi R^2}-\frac{2}{3}R$. 76. 45π $см^3$, 243π $см^3$. 77. 0,028. 78. 5 : 16. 79. 3528π $см^3$. Указание. Разбейте указанную часть шара на цилиндр и два сегмента. 80. $112{,}5\pi$ $дм^3$ или 450π $дм^3$. 81. $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$. Указание. Тело является шаровым сектором.

§ 21.

1. $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$. 2. Большая поверхность равновелика сумме двух других. 3. $\approx$40,4 $м^2$. 4. $\approx$ 116 $м^2$. 5. 75 см. 6. $\pi M+2Q$. Указание. По площади основания найдите его радиус. 7. $\approx$ 25,3 $м^2$. 8. $\approx$ 33,98 $м^2$. 9. $\frac{S}{\cos\alpha}$. Указание. По площади основания найдите его радиус. 10. 2 : 3. 11. 30°. 12. 1 м. Указание. Длина окружности основания равна длине дуги сектора. 13. $\approx$1,04 $м^2$. 14. $\approx$ 4,3 кг. 15. Указание. Выразите объемы шара и конуса через длину образующей конуса. 16. Указание. Выразите обе поверхности через сторону квадрата. 17. 180π $см^2$. 18. 512π $см^2$.

СОДЕРЖАНИЕ

6 КЛАСС

ПЛАНИМЕТРИЯ

7 КЛАСС

СВЕДЕНИЯ О ПОЛЬЗОВАНИИ УЧЕБНИКОМ

№	Фамилия и имя ученика	Учебный год	Состояние учебника	
			В начале года	В конце года
1				
2				
3				
4				
5				

Алексей Васильевич Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 6—10 классов средней школы

Спец. редактор *А. М. Зубков*
Редактор *Т. А. Бурмистрова*
Оформление художника *Б. Л. Николаева*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *Н. А. Биркина*
Корректор *О. В. Ивашкина*

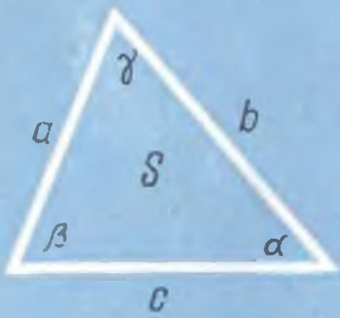
ИБ № 7315

Сдано в набор 03.11.81. Подписано к печати 12.03.82. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 1. Гарнит. школьн. Печать высокая. Усл. печ. л. 18+0,25 форз. Усл. кр. от. 18,6875 л. Уч.-изд. л. 16,38+0,43 форз. Тираж 3302000 экз. Заказ 227. Цена 30 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

СООТНОШЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

(ТЕОРЕМА СИНУСОВ)

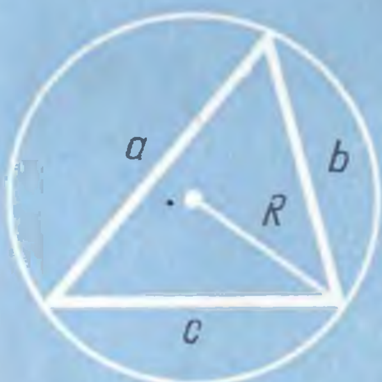
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$

(ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ)

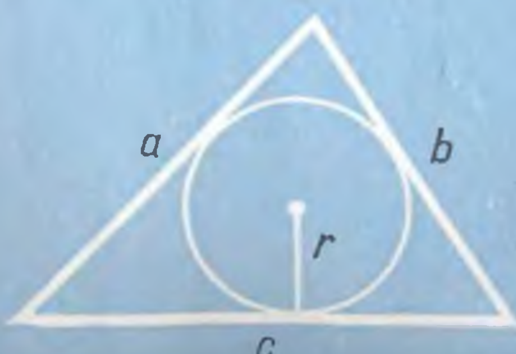
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где} \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

(ФОРМУЛА ГЕРОНА)



$$R = \frac{abc}{4S}$$



$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

ПЕЧАТНЫЕ БУКВЫ	РУКОПИСНЫЕ БУКВЫ	НАЗВАНИЯ БУКВ
Aa	*Aa*	а
Bb	*Bb*	бэ
Cc	*Cc*	цэ
Dd	*Dd*	дэ
Ee	*Ee*	э
Ff	*Ff*	эф
Gg	*Gg*	же
Hh	*Hh*	аш
Ii	*Ii*	и
Jj	*Jj*	йот (жи)
Kk	*Kk*	ка
Ll	*Ll*	эль
Mm	*Mm*	эм

ПЕЧАТНЫЕ БУКВЫ	РУКОПИСНЫЕ БУКВЫ	НАЗВАНИЯ БУКВ
Nn	*Nn*	эн
Oo	*Oo*	о
Pp	*Pp*	пэ
Qq	*Qq*	ку
Rr	*Rr*	эр
Ss	*Ss*	эс
Tt	*Tt*	тэ
Uu	*Uu*	у
Vv	*Vv*	вэ
Ww	*Ww*	дубль-вэ
Xx	*Xx*	икс
Yy	*Yy*	игрек
Zz	*Zz*	зэт

НЕКОТОРЫЕ БУКВЫ ГРЕЧЕСКОГО АЛФАВИТА

буквы	α	β	γ	δ	λ	μ
названия	альфа	бета	гамма	дельта	ламбда	мю

буквы	π	ρ	τ	φ	ψ	ω
названия	пи	ро	тау	фи	пси	омега

30 к.